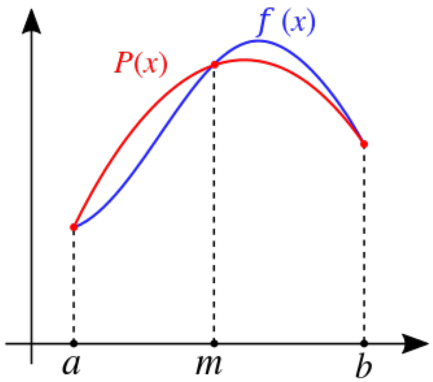
ویکی‌پدیا
دانشنامهٔ آزاد

قاعده سیمپسون

از ویکی‌پدیا، دانشنامهٔ آزاد

در علم محاسبات عددی روشی برای بدست آوردن عددی انتگرال‌ها وجود دارد که توسط توماس سیمپسون مورد استفاده قرار گرفته‌است و به همین دلیل به این روش قاعده سیمپسون می‌گویند. در این قانون با استفاده از n بار استفاده از قانون ذوزنقه برای بدست آوردن مساحت زیر نمودار فرمولی برای مساحت زیر نمودار بدست میاورد که دقیقتر از روش ذوزنقه است. در این قانون با تقسیم کردن نمودار به بخش‌های کوچک‌تر مساحت زیر نمودار را بدست میاورد (با تقسیم به n+۱ بخش که n عددی زوج است).



قاعده سیمپسون تابع‌ها را با یک چندجمله‌ای تخمین می‌زند و برای تخمین انتگرال از این چندجمله‌ای استفاده می‌کند

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

البته حدود صد سال پیش از سیمپسون فردی به نام یوهانس کپلر از این فرمول استفاده کرده بود به همین دلیل گاهی به این روش قانون کپلر هم گفته می‌شود.

محتویات

تعمیم قاعده سیمپسون

اگر اندازهٔ بازهٔ مورد انتگرال کوچک باشد قاعده سیمپسون برای n = ۲ یک جواب نسبتاً دقیق از جواب انتگرال خواهد بود. اما اگر تابع ما پیوستگی نداشته باشد یا اندازهٔ بازهٔ مورد انتگرال بزرگ باشد یا تابع ما دارای مشتقهای ناپیوسته باشد، در هر یک از این موارد قاعده سیمپسون برای n = ۲ جوابی دقیق ارائه نمی‌دهد. در این صورت می‌توان بازه را به n > ۲ بخش تقسیم کرد و در هر یک از این بخش‌ها از قاعده سیمپسون استفاده کرد؛ که در این صورت به آن تعمیم قاعده سیمپسون گفته می‌شود. فرض کنید بازهٔ انتگرال [a,b] به n بخش تقسیم شده‌است و همچنین n را عددی زوج در نظر بگیرید در این صورت طبق قاعده سیمپسون داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{n/2}\Big[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\Big]$$
$$= \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\Big]$$

که در این فرمول $x_j = a + jh$ برای $j = 0, 1, \ldots, n-1, n$ و در آن $h = (b-a)/n$

خطای تعمیم قاعده سیمپسون برابر است با[۱]

$$Error = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$$

که در آن ξ عددی بین a و b است و $h = (b-a)/n$ طول هر گام است.

قاعده سیمپسون یک سوم

اگر چندجمله‌ای درجهٔ دو $P(x)$ را به جای تابع $f(x)$ در فرمول استفاده کنیم می‌توان با استفاده از درونیابی می‌توان این چندجمله‌ای را بدست آورد.[۲]

$$P(x) = f(a)\tfrac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\tfrac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\tfrac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

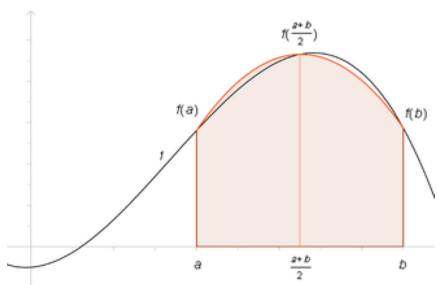
با انتگرال گرفتن از دو طرف تساوی و استفاده از قانون لاگرانژ داریم:

$$\int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

که این روش انتگرال‌گیری که یک حالت خاص از قاعده سیمپسون است رابا نام سیمپسون یک سوم می‌شناسند.

خطای این روش محاسبهٔ انتگرال برابر است با:[۳]

$$Error = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi) \text{ که } a < \xi < b$$



در این شکل با استفاده از قاعده سیمپسون سه هشتم تابع مشخص شده با رنگ مشکی با چندجمله‌ای مشخص شده با رنگ قرمز تخمین زده شده‌است

میانگین نقطهٔ میانی و روش ذوزنقه

از دیگر فرمول‌های به‌دست آمده از قاعده سیمپسون توسط فرمول‌های نقطهٔ میانی

$$M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

و فرمول روش ذوزنقه

$$T = \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)).$$

است که خطای این دو روش به ترتیب

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(a) + O((b-a)^4)$$

و

$$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(a) + O((b-a)^4)$$

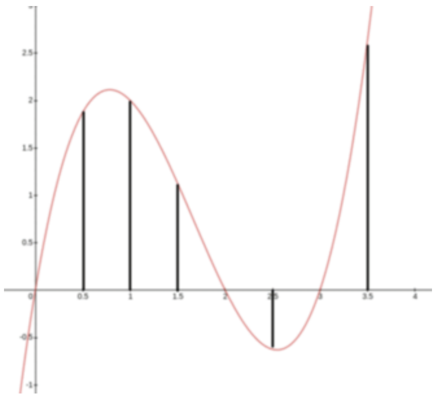
هستند که برای استخراج فرمول جدید از این دو روش به نسبت خطاها آن‌ها را جمع می‌کنیم.

$$\frac{2M+T}{3}$$

جمع وزن‌دار این دو فرمول دقیقاً همان فرمول سیمپسون یک سوم است.

قاعده سیمپسون‌سه هشتم

این قانون یکی دیگر از روش‌های محاسبهٔ انتگرال است. این قانون با درونیابی یک چندجمله‌ای درجه ۳ و استفاده از قاعده سیمپسون بدست می‌آید.[۴]



انتگرال نمودار در بازهٔ صفر تا سه و نیم توسط قاعده سیمپسون سه هشتم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]=\frac{(b-a)}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$$

خطای روش سیمپسون سه هشتم برابر است با:

$$Error=-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)$$

تعمیم قاعده سیمپسون سه هشتم

در این روش با n بار استفاده از قاعده سیمپسون سه هشتم در بازهٔ [a,b] فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+2f(x_6)+\cdots+f(x_n)\right].$$
$$=\frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3\sum_{i\neq 3k}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=1}^{n/3-1} f(x_{3j})+f(x_n)\right] \qquad \textbf{For: } k\in\mathbb{N}_0$$

خطای روش تعمیم قاعده سیمپسون سه هشتم برابر است با[۴]

$$Error=-\frac{h^4}{80}(b-a)f^{(4)}(\xi),$$

قاعده سیمپسون تعمیم یافته

در تعمیم قاعده سیمپسون به جای استفاده از قاعده سیمپسون در بین بخش‌های جداگانه، آن را بین بخش‌هایی که همپوشانی دارند استفاده می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{h}{48}\left[17f(x_0)+59f(x_1)+43f(x_2)+49f(x_3)+48\sum_{i=4}^{n-4} f(x_i)+49f(x_{n-3})+43f(x_{n-2})+59f(x_{n-1})+17f(x_n)\right]$$

این فرمول با استفاده از قاعده سیمپسون و قاعده سیمپسون سه هشتم و در نهایت میانگین گرفتن از دو فرمول به‌دست آمده به‌دست آمده‌است.

قاعده سیمپسون تعمیم‌یافته برای‌داده‌های غیرمعمول

برای انتگرال گرفتن از بازهٔ غیرمعمول $I=[a,b]$ که به علت‌های مختلفی مانند کامل نبودن داده‌ها یا از بین رفتن آن‌ها رخ می‌دهد، لازم است آن را به بازه‌های غیر زوج تقسیم کنیم.

فرض کنید این بازه را به زوج زیر بخش (N) با ارتفاع‌های h_k تقسیم کرده‌ایم در این صورت داریم[۵][۶]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(\alpha_i f_{2i+2} + \beta_i f_{2i+1} + \eta_i f_{2i}\right)$$

که $f_k = f\left(a + \sum_{i=0}^{k-1} h_i\right)$ مقادیر تابع اصلی در k امین نقطهٔ قاعده سیمپسون است و ضرایب α_i, β_i, and η_i از طریق زیر به‌دست می‌آیند

$$\alpha_i = \frac{2h_{2i+1}^3 - h_{2i}^3 + 3h_{2i}h_{2i+1}^2}{6h_{2i+1}(h_{2i+1} + h_{2i})},$$

$$\beta_i = \frac{h_{2i+1}^3 + h_{2i}^3 + 3h_{2i+1}h_{2i}(h_{2i+1} + h_{2i})}{6h_{2i+1}h_{2i}},$$

$$\eta_i = \frac{2h_{2i}^3 - h_{2i+1}^3 + 3h_{2i+1}h_{2i}^2}{6h_{2i}(h_{2i+1} + h_{2i})}$$

که استفادهٔ این روش در قطعه کد زیر در پایتون (زبان برنامه‌نویسی) آمده‌است:

```python
import numpy as np

def simpson_nonuniform(x, f):
    """
    Simpson rule for irregularly spaced data.

        Parameters
        ----------
        x : list or np.array of floats
                Sampling points for the function values
        f : list or np.array of floats
                Function values at the sampling points

        Returns
        -------
        float : approximation for the integral
    """
    N = len(x) - ۱
    h = np.diff(x)

    result = ۰.۰
    for i in range(۱, N, ۲):
        hph = h[i] + h[i - ۱]
        result += f[i] * ( h[i]**۳ + h[i - ۱]**۳
                           + ۳. * h[i] * h[i - ۱] * hph )\
                     / ( ۶ * h[i] * h[i - ۱] )
        result += f[i - ۱] * ( ۲. * h[i - ۱]**۳ - h[i]**۳
                              + ۳. * h[i] * h[i - ۱]**۲)\
                     / ( ۶ * h[i - ۱] * hph)
        result += f[i + ۱] * ( ۲. * h[i]**۳ - h[i - ۱]**۳
                              + ۳. * h[i - ۱] * h[i]**۲)\
                     / ( ۶ * h[i] * hph )

    if (N + ۱) % ۲ == ۰:
        result += f[N] * ( ۲ * h[N - ۱]**۲
                          + ۳. * h[N - ۲] * h[N - ۱])\
                     / ( ۶ * ( h[N - ۲] + h[N - ۱] ) )
        result += f[N - ۱] * ( h[N - ۱]**۲
                           + ۳*h[N - ۱]* h[N - ۲] )\
                     / ( ۶ * h[N - ۲] )
        result -= f[N - ۲] * h[N - ۱]**۳\
                     / ( ۶ * h[N - ۲] * ( h[N - ۲] + h[N - ۱] ) )
    return result
```

یادداشت‌ها

۱. Atkinson صفحه ۲۵۶; Süli and Mayers, بخش ۷٫۵

۲. Atkinson, صفحه ۲۵۶; Süli and Mayers, بخش ۷٫۲

۳. Atkinson، معادلهٔ (۵/۱/۱۵)؛ Süli and Mayers، تئوری ۷.۲

۴. Matthews ۲۰۰۴

۵. Kylänpää, Ilkka (۲۰۱۹). *Computational Physics course*. Tampere University.

۶. Cartwright, Kenneth V. (۲۰۱۶). "Simpson's Rule Integration with MS Excel and Irregularly-spaced Data" (http://msme.us/۲۰۱۶-۲-۳.pdf) (PDF). *Journal of Mathematical Science and Mathematics Education*. ۱۱ (۲): ۳۴–۴۲.

منابع

- Atkinson, Kendall E. (۱۹۸۹). *An Introduction to Numerical Analysis* (۲nd ed.). John Wiley & Sons. ISBN ۰-۴۷۱-۵۰۰۲۳-۲.
- Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas (۲...). *Numerical Analysis* (۷th ed.). Brooks/Cole. ISBN ۰-۵۳۴-۳۸۲۱۶-۹

این صفحه آخرین‌بار در ۲۷ ژوئیهٔ ۲۰۲۰ ساعت ۰۳:۱۰ ویرایش شده‌است.

u/mathews/n۲۰۰۳/Simpson۳۸RuleMod.html). *Numerical Analysis - Numerical Methods Project*. California State University, Fullerton. Archived from the original (http://math.fullerton.edu/mathews/n۲۰۰۳/Simpson۳۸RuleMod.html) on ۴ December ۲۰۰۸. Retrieved ۱۱ November ۲۰۰۸.

- Press, William H.; Flannery, Brian P.; Vetterling, William T.; Teukolsky, Saul A. (۱۹۸۹). *Numerical Recipes in Pascal: The Art of Scientific Computing* (https://books.google.com/books?id=bh۵w۶E-M-PUC&pg=PA۱۲۲&dq=extended-simpson٪.۲۷s-rule). Cambridge University Press. ISBN ۰-۵۲۱-۳۷۵۱۶-۹.
- Süli, Endre; Mayers, David (۲۰۰۳). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN ۰-۵۲۱-۰۰۷۹۴-۱.
- Weisstein, Eric W. (۲۰۱۰). "Newton-Cotes Formulas" (http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html). *MathWorld--A Wolframtite Web Resource*. MathWorld. Retrieved ۲ August ۲۰۱۰.

برگرفته از «https://fa.wikipedia.org/w/index.php?title=قاعده_سیمپسون&oldid=۲۹۶۱۳۰۹۷»