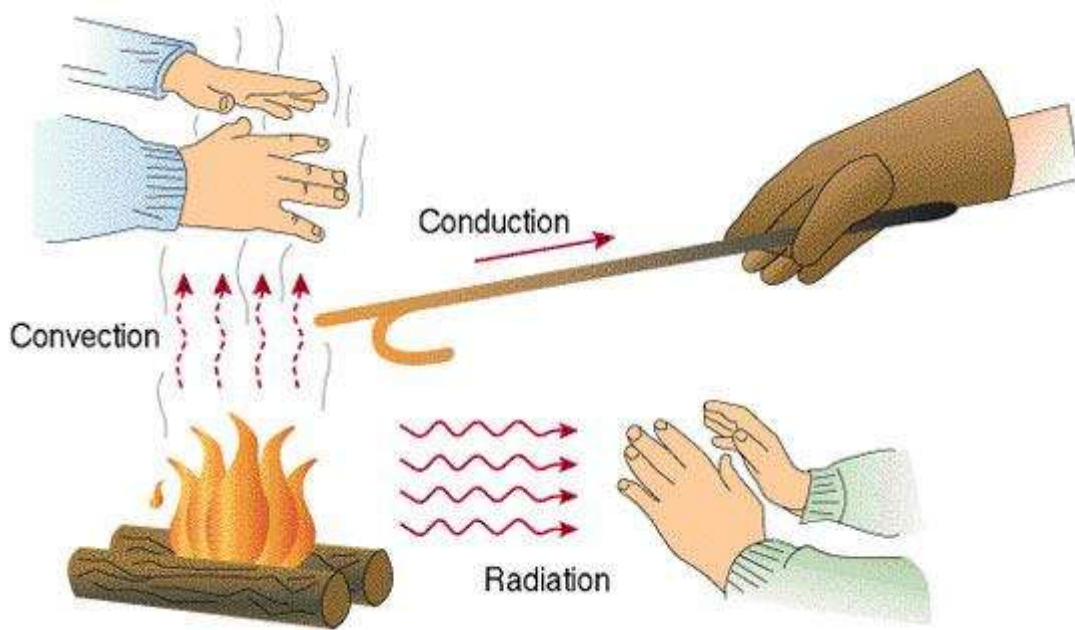


انتقال حرارت (۱)



۱	فصل اول : مفاهیم فیزیکی و معادلات نرخ انتقال حرارت
۲	۱-۱ : انرژی حرارتی و انتقال حرارت
۳	۱-۲ : انتقال حرارت هدایتی
۴	۱-۳ : ضریب هدایت حرارتی
۴	۱-۴ : نکاتی چند از ضریب هدایت حرارتی
۵	۱-۵ : ضریب نفوذ حرارتی
۶	۱-۶ : انتقال حرارت جابجایی
۶	۱-۷ : ضریب انتقال حرارت جابجایی
۷	۱-۸ : نکاتی چند در مورد ضریب انتقال حرارت جابجایی
۷	۱-۹ : روشهای افزایش انتقال حرارت جابجایی
۸	۱-۱۰ : انتقال حرارت تشعشعی
۸	۱-۱۱ : تفاوت انتقال حرارت تشعشعی با انتقال حرارت هدایتی و جابجایی
۹	۱-۱۲ : تجزیه و تحلیل مسائل انتقال حرارت
۹	۱-۱۳ : خلاصه
۱۱	فصل دوم : معادلات انتقال حرارت هدایتی
۱۲	۲-۱ : معادلات انتقال حرارت هدایتی
۱۲	۲-۲ : معادله انتقال حرارت - یک بعدی (دیواره)
۱۳	۲-۳ : معادله کلی انتقال حرارت هدایتی سه بعدی
۱۷	۲-۴ : معادله انتقال حرارت هدایتی یک بعدی (استوانه):
۱۹	۲-۵ : معادله انتقال حرارت هدایتی یک بعدی (کره)

۲۲	۶-۲ : خلاصه
۲۳	فصل سوم : انتقال حرارت هدایتی پایدار و یک بعدی
۲۴	۳-۱ : انتقال حرارت هدایتی پایدار و یک بعدی
۲۴	۳-۲ : انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی ، برای دیواره مسطح
۲۶	۳-۳ : مقاومت حرارتی
۲۷	۳-۴ : انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، با چشمه حرارتی ثابت ، در دیواره
۳۱	۳-۵ : دیواره مرکب
۳۳	۳-۶ : انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی ، در استوانه
۳۵	۳-۷ : شعاع بحرانی استوانه
۳۸	۳-۸ : انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی ، در کره
۴۱	۳-۹ : شعاع بحرانی کره
۴۲	۳-۱۰ : انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته
۴۳	۳-۱۱ : محاسبات انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته
۴۸	۳-۱۲ : خلاصه
۵۰	فصل چهارم : انتقال حرارت هدایتی ، چند بعدی
۵۱	۴-۱ : مقدمه
۵۱	۴-۲ : روش های تحلیلی حل معادلات انتقال حرارت هدایتی
۵۳	۴-۳ : حل تحلیلی معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی پایدار دو بعدی ، بدون چشمه حرارتی ، در حالت خاص
۵۷	۴-۴ : روشهای حل عددی انتقال حرارت هدایتی پایدار دو بعدی ، بدون منبع حرارتی
۶۲	۴-۵ : هدایت حرارتی سه بعدی

۶۳	۴-۶: خلاصه
۶۴	فصل پنجم: انتقال حرارت هدایتی ناپایدار
۶۵	۵-۱: انتقال حرارت هدایتی ناپایدار
۶۵	۵-۲: معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار یک بعدی، بدون منبع حرارتی، در دیواره
۶۶	۵-۳: حل تحلیلی معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار دو بعدی، بدون چشمه حرارتی
۷۱	۵-۴: حل معادلات انتقال حرارت هدایتی ناپایدار، بدون چشمه حرارتی
۷۱	۵-۴-۱: پارامترهای بدون بعد کاربردی در انتقال حرارت هدایتی ناپایدار
۷۲	۵-۵: حل معادلات انتقال حرارت هدایتی ناپایدار چند بعدی، با استفاده از نمودارهای هیسلر
۷۳	۵-۶: سیستم ظرفیت حرارتی فشرده
۷۳	۵-۷: حل معادله توزیع دما در سیستم ظرفیت حرارتی فشرده
۷۶	۵-۸: سیستم ظرفیت حرارتی فشرده بدون اثر جابجایی
۷۹	۵-۹: اهمیت عدد بدون بعد بایو
۸۱	۵-۱۰: خلاصه
۸۲	فصل ششم: مقدمه ای بر انتقال حرارت جابجایی
۸۳	۶-۱: مقدمه
۸۳	۶-۲: ضریب انتقال حرارت جابجایی
۸۴	۶-۳: اعداد بدون بعد کاربردی در انتقال حرارت جابجایی
۸۵	۶-۴: لایه مرزی سرعت
۸۶	۶-۵: لایه مرزی حرارت
۸۶	۶-۶: اهمیت لایه های مرزی
۸۷	۶-۷: جریان آرام و مغشوش
۸۷	۶-۸: معادلات حاکم در لایه مرزی

۸۸	۶-۸-۱ : معادله پیوستگی
۸۹	۶-۸-۲ معادله اندازه حرکت
۸۹	۶-۸-۲-۱ نیروی حجمی :
۹۰	۶-۸-۲-۲ نیروی سطحی :
۹۱	۶-۱۰ معادله انرژی :
۹۴	۶-۱۱ معادلات حاکم در لایه مرزی ، جریان آرام ، صفحه تخت :
۹۹	۶-۱۱-۱ معادلات تجربی در لایه مرزی جریان آرام صفحه تخت :
۱۰۰	۶-۱۱-۲ معادلات تجربی در لایه مرزی ، جریان مغشوش ، صفحه تخت
۱۰۱	۶-۱۲ : جریان داخلی
۱۰۱	۶-۱۳ : جریان سیال از روی استوانه
۱۰۳	۶-۱۴ : انتقال حرارت جابجایی روی استوانه
۱۰۵	۶-۱۵ : انتقال حرارت جابجایی در داخل استوانه
۱۰۶	۶-۱۶ : خلاصه
۱۰۷	فصل هفتم : آشنایی با مبدل‌های حرارتی
۱۰۸	۷-۱ مبدل‌های حرارتی :
۱۰۹	۷-۲ مبدل حرارتی لوله پوسته ای :
۱۱۱	۷-۳ تجزیه و تحلیل مبدل‌های حرارتی :
۱۱۱	۷-۳-۱ محاسبات مبدل‌های حرارتی به روش اختلاف دمای متوسط لگاریتمی :
۱۱۶	۷-۴ معیارهای انتخاب جریان برای لوله یا پوسته
۱۱۶	۷-۵ بافل ها
۱۱۷	۷-۶ راه اندازی ، بستن ، مراقبت و نگهداری از مبدل‌های حرارتی پوسته و لوله :
۱۱۷	۷-۷ راه اندازی (Start-up) :
۱۱۸	۷-۸ بستن مبدلها :
۱۱۸	۷-۹ بازرسی مبدلها حرارتی در حین کار کردن :
۱۱۹	۷-۱۰ تمیز کردن مبدل حرارتی :

- ۱۱۹ ۷-۱۱ آزمایش مبدل‌های حرارتی :
- ۱۲۰ ۷-۱۲ آزمایش پوسته (Shell Test) :
- ۱۲۰ ۷-۱۳ آزمایش لوله (Tube Test) :
- ۱۲۱ ۷-۱۴ گرفتگی (Fouling) :
- ۱۲۱ ۷-۱۴-۱ رسوب های مواد نامحلول :
- ۱۲۱ ۷-۱۴-۲ رسوبهای ویژه :
- ۱۲۱ ۷-۱۴-۳ رسوبهای تشکیل دهنده ناشی از واکنشهای شیمیائی :
- ۱۲۱ ۷-۱۴-۴ رسوبهای تشکیل شده در اثر خوردگی :
- ۱۲۲ ۷-۱۴-۵ رسوبهای بیولوژیکی :
- ۱۲۲ ۷-۱۴-۶ رسوبهای ناشی از سرد شدن مایعات (Freezing) :
- ۱۲۲ ۷-۱۵ رشد رسوبها
- ۱۲۲ ۷-۱۶ هزینه های ناشی از تشکیل رسوب :
- ۱۲۲ ۷-۱۷ ملاحظات مربوط به طراحی :
- ۱۲۳ ۷-۱۸ مسدود شدن مسیر حرکت بخار (Vapor Locking) :
- ۱۲۳ ۷-۱۹ خلاصه :
- ۱۲۵ ضمیمه ۱: خلاصه روابط کاربردی برای حل مسائل انتقال حرارت I
- ۱۳۳ ضمیمه ۲: نمودارهای کاربردی برای حل مسائل انتقال حرارت I

فصل اول

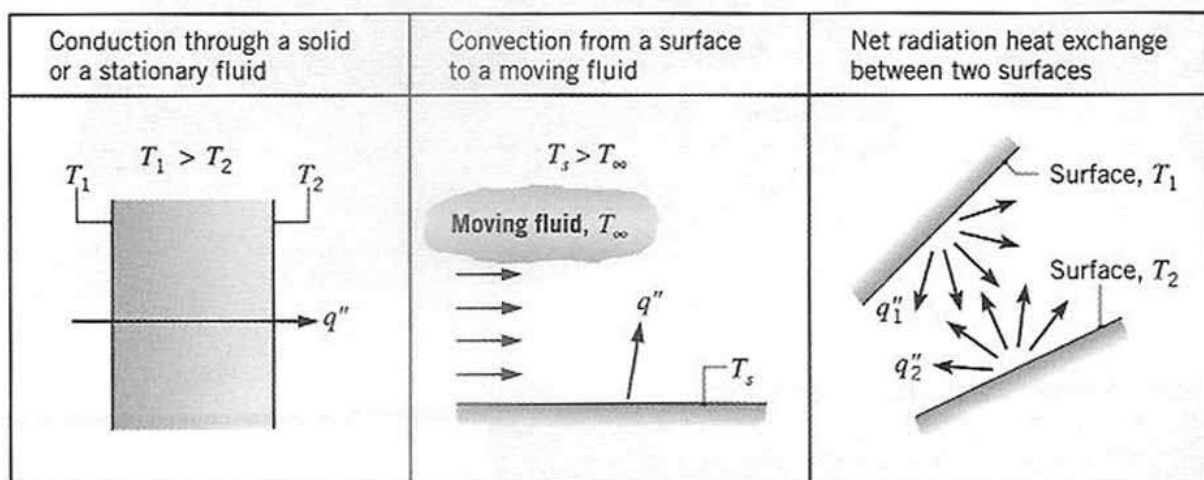
مفاهیم فیزیکی و معادلات نرخ

انتقال حرارت

۱-۱: انرژی حرارتی و انتقال حرارت

در ترمودینامیک با تبادل گرما و نقش آن آشنا شده ایم و بنابر اصل دوم ترمودینامیک چنانچه قسمتی از یک سیستم نسبت به قسمتهای دیگر سیستم اختلاف دما داشته باشد انرژی حرارتی از نقاط گرم به سمت نقاط سرد جریان می یابد و به کمک روابط ترمودینامیکی می توان وضعیت حالت تعادل ، دمای تعادل ، مقدار کل انرژی مبادله شده را بدست آورد . اما در ترمودینامیک مکانیزم انتقال گرما و روش های محاسبه نرخ انتقال گرما مورد تجزیه و تحلیل قرار نمی گیرد . لذا ترمودینامیک فقط حالت تعادلی سیستم را مورد بررسی قرار می دهد و لازمه حالت تعادلی معادله ، نبود گرادیان دماست . بعبارت دیگر انتقال گرما ذاتاً غیر تعادلی است لذا هدف ما از مطالعه انتقال گرما پاسخگویی به زمان لازم برای رسیدن به تعادل سیستم و تغییرات دما برحسب زمان و شدت انتقال گرما در هر لحظه از زمان و مکان است . بنابراین انتقال حرارت به صورت انرژی انتقال یافته از یک سیستم به سیستم دیگر در اثر وجود اختلاف دما بین دو سیستم تعریف می گردد لذا به زبان ساده تر انتقال حرارت ، ناشی از وجود اختلاف دماست پس نیروی محرکه انتقال حرارت گرادیان دماست بنابراین نرخ انتقال حرارت در یک جهت مشخص ، به میزان اختلاف دما بر واحد طول بستگی دارد و هر چه اختلاف دما بین دو سیستم زیادتر باشد نرخ انتقال حرارت بیشتر می شود .

انتقال حرارت کلاً به سه روش هدایت ، جابجایی و تابشی صورت می گیرد . در اکثر مسائل کاربردی انتقال حرارت به صورت ترکیبی از دو یا سه روش فوق می باشد .



شکل (۱-۱) انواع مختلف انتقال حرارت هدایتی ، جابجایی ، تشعشی

۱-۲: انتقال حرارت هدایتی

اگر دمای ناحیه ای از جسم از ناحیه ای دیگر آن بیشتر باشد حرارت از ناحیه گرمتر به سمت ناحیه سردتر جریان می یابد. این پدیده را هدایت گویند در این پدیده انتقال انرژی حرارتی به صورت جریان الکترونیهای آزاد و یا انتقال انرژی ارتعاشی ذرات جسم به ذرات مجاور، در دمای پایینتر می باشد. در این روش واسطه انتقال حرارت ساکن است (جامدات) لذا شدت انتقال حرارت هدایتی (مقدار گرمای منتقل شده در واحد زمان) متناسب با شیب دما در جسم و اندازه سطح عبوری گرما می باشد. بنابراین شدت انتقال حرارت هدایتی توسط فوریه به صورت زیر بیان گردیده است.

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1 - 1)$$

بعبارت دیگر رابطه (۱-۱) بیان می کند که هدایت حرارتی در یک محیط به هندسه، ضخامت، جنس ماده و اختلاف دما در عرض محیط بستگی دارد

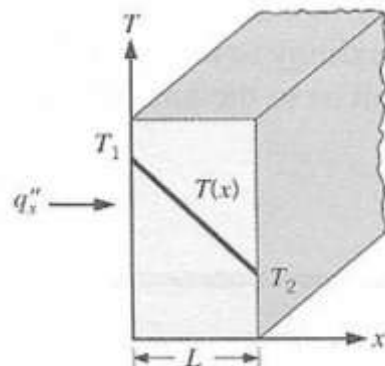
K: ضریب هدایتی حرارتی $\frac{W}{m \cdot C^\circ}$

A: سطح مقطع عمود بر جهت حرارت m^2

ΔT : اختلاف دما C°

Δx : ضخامت لایه m

q: مقدار حرارت منتقل شده در واحد زمان $\frac{J}{s}$



شکل (۱-۲) انتقال حرارت هدایتی یک بعدی

بنابراین قانون فوریه ، بیانگر مکانیزم انتقال حرارت به روش هدایتی است

قانون فوریه مبتنی بر تحلیل نیست بلکه یک تجربه بشری است همچنین علامت منفی در قانون فوریه بیانگر جهت کاهش انتقال دماست ، به عبارت روشن تر گرما نمی تواند از نقطه ای سرد به نقطه ای گرم نقل مکان کند. (قانون دوم ترمودینامیک) قانون فوریه برای تمامی حالت (پایدار ، ناپایدار) معتبر است . حال با توجه به رابطه (۱-۱) اگر گرادین دما ثابت باشد انتقال حرارت تابع ضخامت لایه نخواهد بود زیرا به ازای هر ضخامتی مقدار انتقال حرارت ثابت خواهد بود

۳-۱: ضریب هدایت حرارتی

ضریب هدایت حرارتی ، یک خاصیت مهم حرارتی جسم است و به نوع جسم و شرایط فیزیکی از قبیل دما و فشار آن بستگی دارد . لذا هر چه مقدار عددی ضریب هدایت حرارتی جسم بزرگتر باشد جسم هادی تر بود و مقدار بیشتری گرما از آن عبور می کند و برعکس هر چه مقدار عددی ضریب هدایت حرارتی جسم کوچکتر باشد جسم عایق تر می باشد .

$$K = \frac{q}{\frac{\partial T}{\partial x}} \quad (1 - 2)$$

۴-۱: نکاتی چند از ضریب هدایت حرارتی

- ۱- ضریب هدایت حرارتی معیاری از قابلیت مواد در هدایت گرماست
- ۲- فلزات بیشتر از مایعات و مایعات بیشتر از گازها رسانای حرارت هستند یعنی K گازها $>$ مایعات $>$ جامدات غیر فلزی $>$ K الیاز $>$ K فلزات خالص
- ۳- فشار ، روی ضریب هدایت گازها و مایعات تاثیر ندارد
- ۴- برای بعضی از اجسام جامد ، مخصوصاً اجسام لیفی مقدار K بستگی به جهت انتقال حرارت دارد .
- ۵- K اجسام متخلخل با K سازنده ماده متخلخل متفاوت می باشد .

۶- در جامدات ، ضریب هدایت حرارتی با افزایش دما کاهش می یابد .

۷- در جامدات ضریب هدایت حرارتی ، حاصل جمع امواج ارتعاشی و انرژی منتقله توسط الکترون آزاد است.

۸- در گازها ، ضریب هدایت حرارتی با مجذور دما نسبت مستقیم دارد $K \propto T^{1/2}$

۹- K تابعی از دماست و برای تعیین مقدار دقیق K هر ماده نیاز به داشتن دمای آن ماده است .

۱۰- ضریب هدایت حرارتی گازها ، معمولاً کوچکتر از $0.01 \frac{W}{m^2c}$ است

۱۱- ضریب هدایت حرارتی مایعات ، با افزایش دما کاهش می یابد به جز آب و گلیسرین

۱۲- ضریب هدایت حرارتی مایعات ، با افزایش جرم مولکولی کاهش می یابد .

۱۳- ضریب هدایت حرارتی مایعات ، به جز اطراف نقطه سه گانه نسبت به فشار خنثی است

۱۴- ضریب هدایت حرارتی مایعات فلزی ، خیلی بیشتر از ضریب هدایت حرارتی مایعات غیر فلزی است.

۱۵- ضریب هدایت حرارتی فلزات ، معیار ثابتی ندارد . بدینصورت که در بعضی از فلزات ، ضریب هدایت حرارتی با افزایش دما کاهش می یابد (مس) در بعضی از فلزات ، ضریب هدایت حرارتی با افزایش دما افزایش می یابد (آلومینیوم) در بعضی فلزات ، ضریب هدایت حرارتی با افزایش دما بدون تغییر باقی میماند (فولاد)

۱۶- در دماهای بسیار پایین ، مقدار K با تغییر دما به سرعت تغییر می کند .

۵-۱: ضریب نفوذ حرارتی

ضریب نفوذ حرارتی ، یک خاصیت حرارتی جسم است که به صورت $\alpha = \frac{K}{\rho c_p}$ تعریف می شود .

لذا ضریب نفوذ حرارتی بیانگر سرعت پخش یا نفوذ حرارتی در داخل جسم است یعنی هر چه مقدار عددی α بیشتر باشد حرارت در داخل جسم سریعتر پخش می شود از طرفی با توجه به رابطه فوق هرچه مقدار عددی ضریب هدایت حرارتی K بیشتر باشد و یا ظرفیت حرارتی جسم (ρc_p) کمتر باشد مقدار ضریب نفوذ حرارتی جسم (α) بیشتر خواهد شد.

۶-۱: انتقال حرارت جابجایی

اگر سطح جسمی با دمای T_w در مجاورت سیالی با دمای T_∞ قرار گیرد بین جسم و سیال حرارتی مبادله می شود که این روش مبادله حرارتی را انتقال حرارت جابجایی گویند. چنانچه دمای جسم نسبت به دمای سیال بیشتر باشد (شوفاژ ، هوای اطاق) انتقال حرارت جابجایی از جسم به سیال صورت می پذیرد و برعکس (هوای اطاق ، شیشه سرد پنجره) انتقال حرارت جابجایی از سیال به جسم صورت می پذیرد.

لذا انتقال حرارت جابجایی با دو مکانیزم انجام میگیرد:

الف - انتقال انرژی توسط حرکت زیگزاکی مولکولی (تصادفی)

ب - حرکت ماکروسکوپی سیال

لذا برای محاسبه شدت انتقال حرارت جابجایی ، از قانون سرمایش نیوتن استفاده می کنیم .

$$q = hA(T_w - T_\infty) \quad (1 - 3)$$

q : مقدار حرکت منتقل شده در واحد زمان J/s

h : ضریب انتقال حرارت جابجایی $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

A : سطح مقطع عمود بر جهت جریان m^2

T_w : دمای سطح جسم $^\circ C$

T_∞ : دمای سیال $^\circ C$

۷-۱: ضریب انتقال حرارت جابجایی

در معادله (۳-۱) ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) یک کمیت مقداری است و به جهت بستگی ندارد و جزء خاصیت سیال نبود بلکه مقدار آن به هندسه سطح جسم جامد ، نوع حرکت سیال ، سرعت حجمی سیال بستگی دارد .

۸-۱: نکاتی چند در مورد ضریب انتقال حرارت جابجایی

۱ - ضریب انتقال حرارت جابجایی مایعات ، بیشتر از گازهاست .

۲ - ضریب انتقال حرارت جابجایی ، میعان بزرگتر از ضریب انتقال حرارت جابجایی جوشش و ضریب انتقال حرارت جابجایی جوشش بزرگتر از ضریب انتقال حرارت جابجایی اجباری و ضریب انتقال حرارت جابجایی اجباری بزرگتر از ضریب انتقال حرارت جابجایی آزاد است .

۳ - هر گاه بین جسم و سیال حرارت مبادله گردد . خواهیم دانست که در مجاورت سطح گرم جریان به سمت بالا حرکت می کند و در مجاورت سطح سرد جریان به سمت پایین حرکت می کند .

۴ - در معادله قانون سرمایش نیوتن h مستقل از دما مد نظر قرار گرفته است اما اصولاً h تابعی از دماست.

۹-۱: روشهای افزایش انتقال حرارت جابجایی

۱ - زیاد کردن مقدار عددی ضریب انتقال حرارت جابجایی

۲- ایجاد موانع روی سطوح جسم جامد که سبب افزایش سطح مبادله حرارت بین جسم و سیال می شود

۳ - ایجاد اغتشاش و تلاطم بیشتر سرعت جریان سیال

لذا با توجه به مطالب بیان شده انتقال حرارت جابجایی به دو صورت ذیل انجام می گیرد :

الف - انتقال حرارت جابجایی اجباری

ب - انتقال حرارت جابجایی آزاد

اگر جریان سیال توسط عوامل خارجی نظیر پمپ ، فن و... ایجاد گردد انتقال حرارت جابجایی اجباری است و نیز اگر جریان سیال به واسطه اختلاف چگالی ناشی از تغییرات دما باشد انتقال حرارت را جابجایی آزاد گویند .

بنابراین قانون سرمایش نیوتن ، بیانگر مکانیزم انتقال حرارت به روش جابجایی است

۱۰-۱: انتقال حرارت تشعشی

هر گاه دو یا چند جسم که از سطح خود انرژی منتشر می کنند و در معرض دید یکدیگر قرار گیرند مقداری از انرژی تابش شده ، هر سطح به سطح دیگر برخورد می کند و تبادل حرارت صورت می گیرد . که به این روش تبادل حرارت ، انتقال حرارت به روش تشعشی گویند. لذا تبادل انرژی فی مابین دو سطح ، به صورت امواج الکترومغناطیس می باشد . بنابراین کلیه اجسام در دماهای بالاتر از صفر مطلق انتقال حرارت به صورت تشعشی دارند که مقدار شدت انتقال حرارت آن توسط بولتزمن به شرح ذیل بیان گردیده است :

$$q = A \cdot \epsilon \cdot \sigma (T_{W_1}^4 - T_{W_2}^4)$$

q: خالص شدت انتقال حرارت تشعشی J/S

σ : ثابت بولتزمن که مقدار عددی آن برابر $5.6 \times 10^{-8} \frac{Wm^2}{K^4}$ است

ϵ : ضریب صدور سطح جسم که مقدار آن بین ۰-۱ است

A: سطح تشعشع جذب شده m^2

T_{W_1} : دمای مطلق جسم اول K°

T_{W_2} : دمای مطلق جسم دوم K°

با توجه به مطالب بیان شده حداکثر انتقال حرارت تشعشی زمانی خواهد بود که ، فاصله بین دو جسم خلاء کامل باشد .

۱-۱۱: تفاوت انتقال حرارت تشعشی با انتقال حرارت هدایتی و جابجایی

۱- عامل انتقال حرارت در تشعشع ، امواج الکترومغناطیس یا فوتون است در حالیکه عامل انتقال حرارت در هدایت و جابجایی ، مولکول ، یون یا الکترون است .

۲- در تشعشع ، انتقال حرارت با توان چهارم درجه حرارت مطلق جسم بستگی دارد در حالیکه در هدایت و جابجایی ، انتقال حرارت ، متناسب با اختلاف دمای نسبی است

بنابراین قانون بولتزمن ، بیانگر مکانیزم انتقال حرارت به روش تشعشی است

۱-۱۲: تجزیه و تحلیل مسائل انتقال حرارت

- ۱- داده های مسئله: پس از مطالعه دقیق مسئله داده های آنرا به صورت خلاصه بنویسید.
- ۲- خواسته های مسئله: بطور دقیق خواسته ها مسئله را بنویسید.
- ۳- شکل شماتیک: شکل شماتیک سیستم فیزیکی مسئله را رسم کنید.
- ۴- فرضیات: تمامی فرضیات منطقی که مسئله را ساده می کند را بنویسید.
- ۵- خواص: کلیه خواصی را که برای محاسبات نیاز دارید را مشخص کنید.
- ۶- تجزیه و تحلیل: این عمل با کاربرد قوانین بقای مربوطه و استفاده از معادلات انتقال حرارت امکان پذیر است.
- ۷- نتایج: روی نتایج بحث کنید.

۱-۱۳: خلاصه

- ۱- هدایت: پخش انرژی بواسطه حرکت نامنظم مولکولها
$$q = -KA \frac{dT}{dx}$$
- ۲- جابجایی: پخش انرژی بواسطه حرکت نامنظم ملکولها به اضافه انتقال انرژی در اثر حرکت توده سیال
$$q = hA(T_w - T_\infty)$$
- ۳- تشعشع: انتقال انرژی، توسط امواج الکترومغناطیس
$$q = A\varepsilon\sigma(T_{w1}^4 - T_{w2}^4)$$
- ۴- انتقال حرارت، در جامدات و مایعات ساکن به صورت هدایت انجام می شود.
- ۵- انتقال حرارت، در سیالات و گازها به صورت جابجایی و احتمالاً تشعشع انجام می گیرد.
- ۶- مکانیزم انتقال حرارت، در دماهای خیلی بالا تشعشعی است
- ۷- مکانیزم انتقال حرارت، در دماهای پایین جابجایی و هدایت هستند
- ۸- محرک انتقال گرما، گرادیان دماست

۹- نرخ انتقال گرما در یک جهت مشخص به میزان اختلاف دما بر واحد وابسته است یعنی هرچه مقدار اختلاف دما بیشتر باشد ، نرخ انتقال حرارت زیادتر می شود .

۱۰- هرگاه گرادیان دما ثابت بود انتقال حرارت به ضخامت بستگی نخواهد داشت زیرا به ازای هر ضخامتی مقدار انتقال حرارت ثابت است .

۱۱- انتقال حرارت هدایتی تابع برداری است و به جهت بستگی دارد .

۱۲- انتقال حرارت جابجایی یک کمیت مقداری است و به جهت بستگی ندارد .

۱۳- برای اندازه گیری دمای اجسام خیلی دور از پیزو متر استفاده می شود .

۱۴- ρC_p مایعات و جامدات عموماً بیشتر از $1 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3\text{K}}$ است .

۱۵- ρC_p گاز ها به علت کم بودن چگالی شان عموماً برابر $1 \frac{\text{KJ}}{\text{Km}^3}$ هستند .

فصل دوم

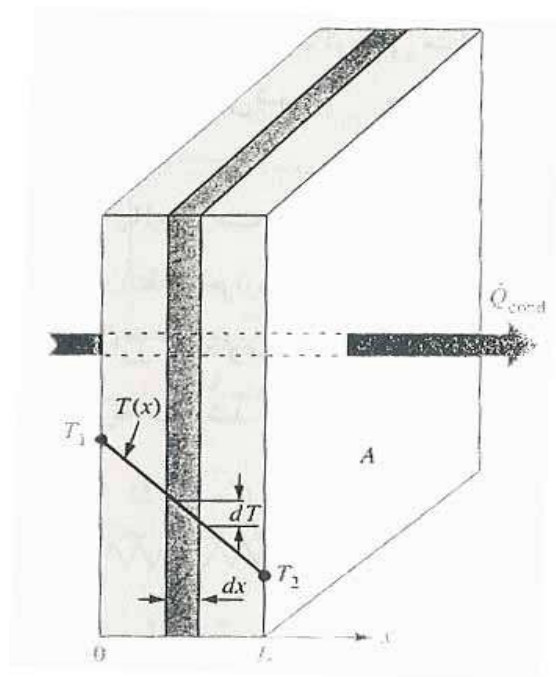
معادلات انتقال حرارت هدایتی

۱-۲: معادلات انتقال حرارت هدایتی

بنابر اصل بقای انرژی ، مجموع انرژیهای ورودی و تولید شده برابر با مجموع انرژیهای خروجی و ذخیره شده در حجم کنترل می باشد لذا برای درک موضوع کافی است با توجه به شکل هندسی سیستم مورد بحث ، یک دستگاه مختصات مناسب (یک المان حجمی) از سیستم انتخاب و سپس اصل بقای انرژی ، برای این حجم کنترل را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم شدت حرارت ورودی و خروجی را به کمک قانون فوریه و با توجه به شیب دما در مقاطع ورودی و خروجی المان حجم می توان بدست آورد .

۲-۲: معادله انتقال حرارت – یک بعدی (دیواره)

شکل (۲-۱) مدل انتقال حرارت هدایتی یک دیواره را نشان می دهد بطوریکه ضریب هدایتی حرارتی آن K



شکل (۲-۱) مدل انتقال حرارت هدایتی یک دیواره

و ضخامت دیواره L و شدت حرارت تولیدی در داخل جسم q° و دمای طرفین دیواره T_1 و T_2 باشند ، اگر بواسطه اختلاف دمای طرفین دیواره ، انتقال حرارت هدایتی در دیوار جریان یابد . به کمک معادله بقای انرژی برای جزء المان سطح مذکور خواهیم داشت :

$$q_{in} + q_{gen} = q_{out} + q_{abs} \quad (2 - 1)$$

لذا با توجه به قانون فوریه هر یک از جملات معادل (۲-۱) را تعیین می کنیم .

$$q_{in} = -KA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{gen} = q^{\circ} Adx$$

$$q_{out} = -KA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} = -KA \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right)$$

$$q_{abs} = Adx \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t}$$

حال با جاگذاری جملات بالا در معادله (۲-۱) خواهیم داشت:

$$-KA \frac{\partial T}{\partial x} + q^{\circ} Adx = -KA \frac{\partial T}{\partial x} - KA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + Adx \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-2)$$

با ساده کردن معادله (۲-۲) و تقسیم باقیمانده جملات (۲-۲) بر $KAdx$ خواهیم داشت:

$$\frac{q^{\circ}}{K} = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho_{cp}}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-3)$$

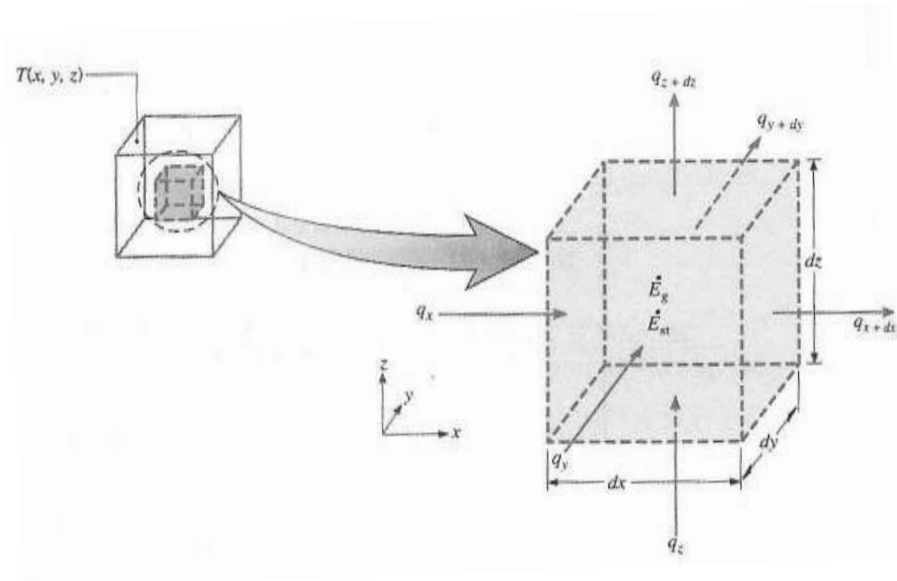
اگر مقدار K ثابت فرض شود و باتوجه به اینکه نسبت $1/\alpha = \frac{\rho_{cp}}{k}$ (عکس ضریب نفوذ حرارتی است)

و جایگذاری آن در معادله (۲-۳) و ساده نمودن معادله فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q^{\circ}/K = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-4)$$

۲-۳: معادله کلی انتقال حرارت هدایتی سه بعدی

جریان حرارت در اجسامی که بیش از یک بعد دارند . به صورت حرارت هدایت شده به داخل و یا خارج شده از المان حجم ، در سه جهت محورهای مختصات خواهد بود . شکل (۲-۲) مدل انتقال حرارت هدایتی را در یک دستگاه مختصات کارتزین سه بعدی به اضلاع dx , dy , dz در فاصله x,y,z از مرکز دستگاه نشان میدهد.



شکل (۲-۲) مدل هدایت حرارتی سه بعدی

لذا معادله بقای انرژی برای المان حجم dx, dy, dz با فرض ثابت بودن K خواهد بود .

$$q_{in} + q_{gen} = q_{out} + q_{abs} \quad (2 - 5)$$

$$q_{in} = q_x + q_y + q_z$$

$$q_{out} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$$

$$q_{gen} = dx dy dz q'$$

$$q_{abs} = dx dy dz \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$q_{x+dx} = -K dy dz \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right)$$

$$q_{y+dy} = -K dx dz \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \right)$$

$$q_{x+dx} = -K dx dy \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \right)$$

با جایگذاری جملات بالا در معادله (۲-۵) و سپس ساده نمودن معادله مذکور ، و تقسیم باقی مانده جملات

معادله بر $K dx dy dz$ و جایگزین نمودن معادل $\frac{\rho c_p}{K}$ یعنی $\frac{1}{\alpha}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 6)$$

معادله (۲-۶) معادله کلی انتقال حرارت هدایتی سه بعدی است.

گاهی اوقات در حالت‌های خاص می توان معادله (۲-۶) را ساده تر کرد.

۱- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی سه بعدی پایدار باشد یعنی :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ}{K} = 0 \quad (2 - 7)$$

۲- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی سه بعدی پایدار و بدون چشمه حرارتی باشد یعنی :

$$q^\circ = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2 - 8)$$

۳- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی دو بعدی پایدار و بدون چشمه حرارتی باشد یعنی :

$$q^{\circ} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2 - 9)$$

۴- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی پایدار یک بعدی و با چشمه حرارتی باشد یعنی :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q^{\circ}}{K} = 0 \quad (2 - 10)$$

۵- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار یک بعدی و بدون چشمه حرارتی باشد :

$$q^{\circ} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 11)$$

۶- اگر معادله انتقال حرارت هدایتی پایدار ، بدون چشمه حرارتی ، یک بعدی باشد :

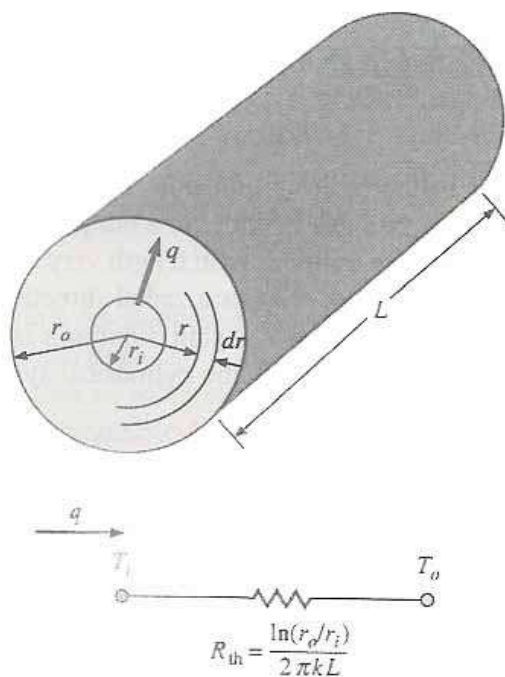
$$q^{\circ} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (2-12)$$

معادله (۲-۱۲) به معادله لاپلاس معروفند . که از نظر ریاضی دارای جواب تحلیلی هستند لذا در شرایط انتقال حرارت هدایتی پایدار ، بدون چشمه حرارتی و یک بعدی ، شار انتقال حرارت ، در جهت انتقال ثابت است .

۲-۴ معادله انتقال حرارت هدایتی یک بعدی (استوانه):

شکل (۲-۳) مدل انتقال حرارت هدایتی یک استوانه بلند را نشان می دهد که المان آن ، لوله ای به ضخامت dr در فاصله r از مرکز و دمای سطح داخلی لوله T_i و دمای سطح خارجی لوله T_o و ضریب هدایت حرارتی آن K است . و بواسطه اختلاف دمای سطح داخلی و خارجی استوانه ، جریان انتقال حرارت هدایتی برقرار خواهد بود.



شکل (۲-۳) مدل انتقال حرارت هدایتی در یک استوانه

لذا اگر موازنه بقای انرژی را برای این المان لوله ای بنویسیم خواهیم داشت :

$$q_{in} + q_{gen} = q_{out} + q_{abs} \quad (2 - 13)$$

حال با توجه به قانون فوریه ، هر یک از جملات معادله (۲-۱۳) را تعیین می کنیم .

$$q_{in} = -2\pi r L K \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_{gen} = 2\pi r L dr q^\circ$$

$$q_{out} = -2\pi r L K \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r+dr} = -2\pi L K \left[r \frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) dr \right]$$

$$q_{abs} = 2\pi r dr \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t}$$

با جاگذاری جملات فوق در معادله (۲-۱۳) و پس از ساده نمودن معادله مذکور و تقسیم نمودن تمامی جملات باقیمانده از معادله (۲-۱۳) به $2k\pi r L dr$ و جانشین نمودن $\frac{1}{\alpha}$ به جای $\frac{\rho_{cp}}{k}$ معادله (۲-۱۳) به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q^\circ}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 14)$$

لذا به همین ترتیب برای مختصات استوانه سه بعدی می توان روابط مربوطه را به شرطی که K ثابت باشد

چنین نوشت :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 15)$$

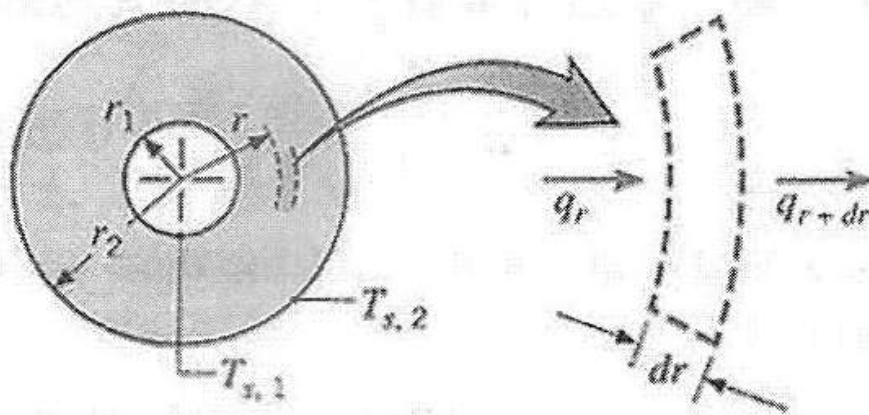
در حالت خاص ، وقتی انتقال حرارت هدایتی استوانه ، یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی و پایدار باشد معادله (۲-۱۵) به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dt} \right) = 0 \quad (2 - 16)$$

معادله (۲-۱۶) نیز به معادلات لاپلاس معروفند که از نظر ریاضی دارای جواب تحلیلی هستند .

۵-۲: معادله انتقال حرارت هدایتی یک بعدی (کره)

شکل (۲-۴) مدل انتقال حرارت هدایتی یک کره را نشان می دهد . که همان آن به صورت یک پوسته به ضخامت dr و دمای سطح داخلی کره T_i و دمای سطح خارجی کره T_o و ضریب هدایت حرارتی آن K است و بواسطه ، اختلاف دمای فی مابین سطوح داخلی و خارجی کره ، جریان انتقال حرارت هدایتی برقرار خواهد بود.



شکل (۲-۴) مدل انتقال حرارت هدایتی در یک کره

حال اگر معادله بقای انرژی را برای المان مذکور بنویسیم خواهیم داشت

$$q_{in} + q_{gen} = q_{out} + q_{abs} \quad (2 - 17)$$

لذا با توجه به قانون فوریه هر یک از جملات (۲-۱۷) را تعیین می کنیم :

$$q_{in} = -4k\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_{gen} = 4\pi r^2 dr q^\circ$$

$$q_{out} = -4\pi r^2 K \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r+\partial r} = -4\pi K \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \left(2r \frac{\partial T}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) dr \right]$$

$$q_{abs} = 4\pi r^2 dr \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t}$$

باجایگذاری جملات فوق در معادله (۲-۱۷) و پس از ساده کردن معادله مذکور و تقسیم نمودن تمامی

جملات باقیمانده از معادله (۲-۱۷) به $4\pi r^2 k dr$ و جانشین کردن $\frac{1}{\alpha}$ بجای $\frac{\rho_{cp}}{k}$ ، معادله (۲-۱۷)

به صورت زیر خواهد شد :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q^\circ}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad (2 - 18)$$

بنابراین برای مختصات سه بعدی کروی ، می توان روابط مربوطه را به شرطی که K مقداری ثابت باشد

چنین نوشت :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + q^\circ / K = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 19)$$

در حالت خاص وقتی انتقال حرارت هدایتی کره یک بعدی ، پایدار ، بدون چشمه حرارتی باشد معادله (۲-۱۹)

به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2 - 20)$$

معادله (۲-۲۰) نیز به معادله لاپلاس معروفند که از نظر ریاضی دارای جواب تحلیلی هستند .

حال با توجه به معادلات (۲-۱۲) ، (۲-۱۶) و (۲-۲۰) که همگی معادلات لاپلاس یک بعدی در دستگاه مختصات هستند ، به صورت زیر نیز قابل بیان هستند :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (2 - 21)$$

۱- اگر دستگاه مختصات کارترین باشد $n=0$

۲- اگر دستگاه مختصات استوانه ای باشد $n=1$

۳- اگر دستگاه مختصات کروی باشد $n=2$

بنابراین با حل معادله انتقال حرارت هدایتی مربوط به یک جسم ، می توان معادله توزیع دما را در آن جسم بدست آورد. ولی حل این معادلات مستلزم معلوم بودن شرایط فیزیکی و زمان اولیه موجود در مرزهای جسم میباشد . لذا معادلات انتقال حرارت هدایتی از نظر مکانی درجه دوم و از نظر زمانی درجه اول هستند لذا برای حل معادلات انتقال حرارت هدایتی ، به دو شرط مرزی و یک شرط اولیه نیازمندیم .

۱- شرط اولیه فقط برای حالت ناپایدار لازم است و معادلات به صورت زیر بیان می شود :

$$t = 0 \quad T(x, 0) = T_0$$

۲- اگر انتقال حرارت هدایتی ، دمای سطح ثابت باشد.

$$T(0, t) = T_1$$

۳- اگر انتقال حرارت هدایتی ، شار حرارتی در سطح ثابت باشد

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q''$$

۴- اگر انتقال حرارت هدایتی ، سطح آدیاباتیک باشد

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

۶-۲: خلاصه

۱- اگر در سطح جسم انتقال حرارت جابجایی داشته باشیم مقدار انتقال حرارت هدایتی در جسم با مقدار انتقال حرارت جابجایی جسم برابر خواهد بود.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_w - T_\infty)$$

۲- اگر نقطه اکسترم منحنی توزیع دما روی سطح جسم باشد بیانگر آدیاباتیک بودن سطح است.

۳- اگر منحنی توزیع دما دارای نقطه می نیمم باشد بیانگر گرم شدن جسم است.

۴- اگر منحنی توزیع دما دارای نقطه ماکزیمم باشد بیانگر سرد شدن جسم است.

۵- اگر منحنی توزیع دما به صورت خط راست باشد بیانگر عدم وجود چشمه حرارتی در داخل جسم و پایدار بودن توزیع دما در جسم است.

فصل سوم

انتقال حرارت هدایتی

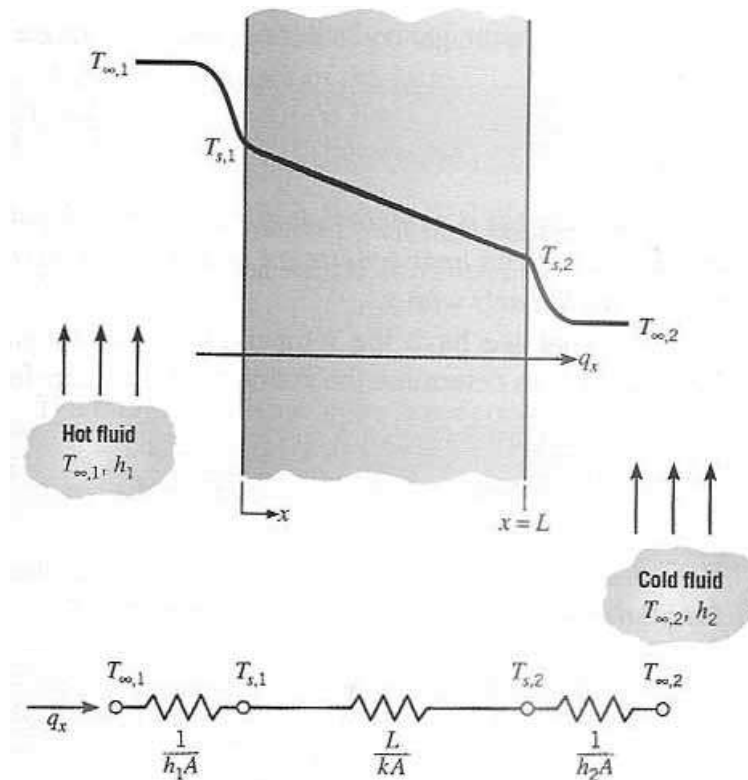
پایدار و یک بعدی

۳-۱: انتقال حرارت هدایتی پایدار و یک بعدی

در این فصل به بررسی سیستم‌های هدایتی پایدار و یک بعدی انتقال حرارت می‌پردازیم بنابراین در یک سیستم یک بعدی، گرادیان دما فقط در یک جهت محور مختصات وجود دارد و انتقال حرارت نیز فقط در همان جهت خواهد بود لذا هدف اصلی در این فصل، تعیین معادله توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در اشکال هندسی می‌باشد.

۳-۲: انتقال حرارت هدایتی پایدار، یک بعدی، بدون چشمه حرارتی، برای دیواره مسطح

در انتقال حرارت پایدار یک بعدی، بدون چشمه حرارتی در یک دیواره ساده، درجه حرارت فقط تابعی x بوده و انتقال حرارت فقط در همان جهت جریان می‌یابد شکل (۳-۱)



شکل (۳-۱) مدل انتقال حرارت در یک دیواره مسطح

با توجه به شکل (۳-۱) که ضریب هدایت حرارتی K و ضخامت دیواره L و دو طرف دیواره دارای دماهای ثابت T_1, T_2 باشند. می توان معادله توزیع دما در داخل دیواره و همچنین شدت حرارت انتقالی از درون دیواره را به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (3-1)$$

با دو بار انتگرالگیری از معادله (۳-۱) خواهیم داشت

$$\frac{dT}{dx} = c_1 \quad (3-2)$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما دیواره بدون منبع حرارتی به صورت زیر خواهد بود :

$$T_{(x)} = c_1 x + c_2 \quad (3-3)$$

معادله (۳-۳) معادله خطی به شیب c_1 و عرض از مبدا c_2 است و با توجه به اینکه c_1, c_2 ثابتهای

انتگرالند مقدار آنها با استفاده از شرایط مرزی شکل (۳-۱) تعیین می گردند .

$$B.C.1 \quad x = 0 \quad T = T_1 \rightarrow c_2 = T_1 \quad (3-4)$$

$$B.C.2 \quad x = L \quad T = T_2 \rightarrow c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (3-5)$$

با جاگذاری مقادیر c_1 و c_2 در معادله جواب عمومی (۳-۳) معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد بود .

$$T_{(x)} = \frac{(T_2 - T_1)}{L} x + T_1 \quad (3-6)$$

حال با در دست داشتن معادله توزیع دما (۳-۶) و با استفاده از قانون فوریه معادله (۱-۱) نرخ ، انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایدار ، بدون چشمه حرارتی دیواره مسطح محاسبه می شود . لذا برای این کار ، کافی

است از معادله (۳-۶) نسبت به x مشتق بگیریم تا گرادیان دما $\frac{dT}{dx}$ بدست آید با جایگزینی گرادیان دما در معادله (۱-۱) معادله نرخ انتقال حرارت هدایتی یک بعدی دیواره تعیین خواهد شد .

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (3 - 7)$$

$$q = -KA \frac{dT}{dx} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (3 - 8)$$

۳-۳: مقاومت حرارتی

همانطور که مقاومت الکتریکی وابسته به جریان الکتریسیته است مقاومت حرارتی نیز وابسته به جریان حرارت است لذا مقاومت حرارتی را به صورت نسبت پتانسیل محرک به نرخ انتقال حرارت مربوطه تعریف می کنیم یعنی :

$$R = \frac{\text{پتانسیل محرک}}{\text{نرخ انتقال حرارت}}$$

لذا با توجه به تعریف مقاومت حرارتی و نیز معادله (۳-۸) مقاومت حرارتی هدایتی دیواره برابر است با :

$$R_{cond} = \frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{L}{KA} \quad (3 - 9)$$

همچنین مقاومت حرارتی را می توان برای انتقال حرارت جابجایی روی یک سطح نیز تعریف کرد بنابراین با توجه به قانون سرمایش نیوتن معادله (۳-۱)

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

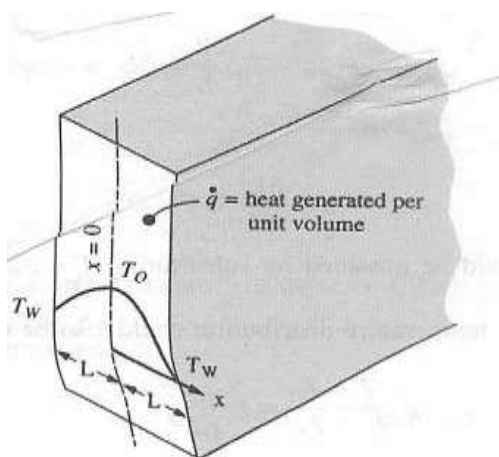
مقاومت حرارتی جابجایی دیواره برابر است با :

$$R_{cond} = \frac{T_w - T_\infty}{q} = \frac{1}{hA} \quad (3 - 10)$$

۳-۴: انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، با چشمه حرارتی ثابت ، در دیواره

یکی از مسائل مهم قابل بررسی در هدایت حرارتی این است که سیستم خود تولید کننده حرارت (چشمه حرارتی) باشد. همانگونه که بیان شده، وجود شیب دما در اجسام، باعث انتقال حرارت درون جسم میشود. چنانچه خود جسم به نحوی تولید کننده حرارت باشد. معادله بقای انرژی و در نتیجه معادله توزیع دما، نرخ انتقال حرارت در جسم، میزان و جهت انتقال حرارت در جسم نیز متفاوت خواهد بود نمونه های چشمه حرارتی عبارتند از، جریان الکتریکی، پرتوهای رادیواکتیو در فلزات تابشی، واکنش شیمیایی درون سیستم، لذا شدت تولید حرارت $q^{\circ} \left(\frac{W}{m^3} \right)$ عبارت است از، مقدار حرارت تولید شده در حجم جسم

و در زمان واحد شکل (۳-۲)



شکل (۳-۲) مدل چشمه حرارتی ثابت در دیواره

حال با توجه به شکل (۳-۲) دماهای طرفین دیواره در T_w و ضخامت آن $2L$ و ضریب انتقال حرارت هدایتی آن ثابت K و شدت تولید حرارت در داخل دیواره q° باشد. با توجه به معادله (۱۰-۲)، معادله توزیع دمای داخلی و شدت حرارت انتقالی از طرفین دیواره به شرح ذیل خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q^\circ}{K} = 0 \quad (2 - 10)$$

با دوبار انتگرالگیری از معادله فوق خواهیم داشت

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-q^\circ}{K}x + C_1 \quad (3 - 11)$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما دیواره با وجود منبع حرارتی به صورت زیر خواهد بود:

$$T = \frac{-q^\circ x^2}{2K} + C_1x + C_2 \quad (3 - 12)$$

با توجه به اینکه C_1 , C_2 ثابتهای انتگرال اند مقدار آنها با توجه به شرایط مرزی شکل (۳-۲) تعیین می شوند .

$$B.C.1 \quad x = 0 \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$B.C.2 \quad x = L \quad T = T_w \quad \rightarrow \quad C_2 = T_w + \frac{q^\circ}{2K}L$$

حال با جایگذاری مقادیر C_1 , C_2 در معادله (۳-۱۲) معادله توزیع دما در دیواره با چشمه حرارتی به صورت

زیر خواهد بود:

$$T = T_w + \frac{q^\circ}{2K}(L^2 - x^2) \quad (3 - 13)$$

دمای مرکز دیواره در $x = 0$ برابر خواهد شد با :

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad T_{max} = T_w + \frac{q^\circ L^2}{2K} \quad (3 - 14)$$

برای محاسبه شدت حرارت انتقالی کافی است از معادله (۳-۱۳) نسبت به x مشتق بگیریم تا گرادیان دما

یعنی بدست آید $\frac{dT}{dx}$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q^\circ}{K}x$$

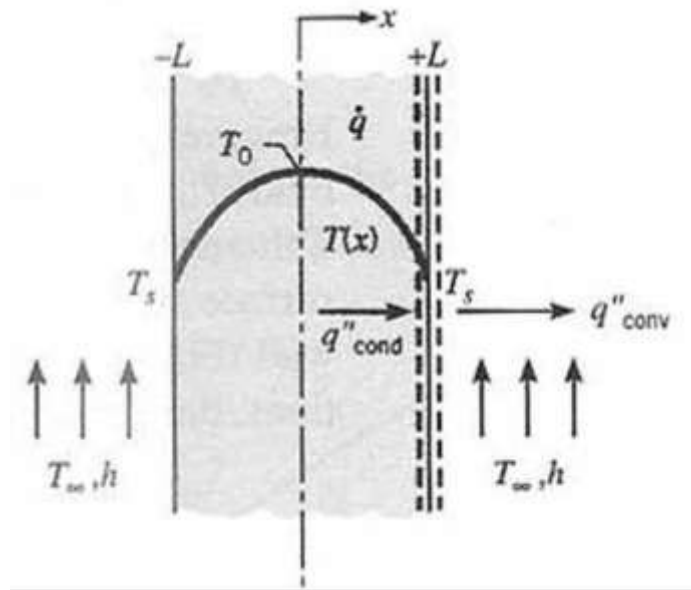
حال گرادیان دمای بدست آمده را در معادله (۱-۱) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$q = -KA \frac{dT}{dx} = -KA \left(-\frac{q^{\circ}L}{K} \right) = Aq^{\circ}L \quad (3-15)$$

با توجه به متقارن بودن دیواره ، حرارت خروجی از طرفین دیواره برابر خواهد بود

$$q = 2Aq^{\circ}L \quad (3-16)$$

حال با توجه به شکل (۳-۳) اگر طرفین دیواره با سیالی که دمای آن T_{∞} و ضریب انتقال حرارت جابجایی آن h باشد در تماس باشند.



شکل (۳-۳) مدل چشمه حرارتی ثابت با اثر جابجایی بر دیواره

محاسبه دمای سطح دیواره و معادله توزیع دما و شدت حرارت انتقالی از طرفین دیواره در حالت پایدار حرارتی چنین خواهد بود :

حرارت خارج شده از سطح دیواره برابر است با حرارت هدایت شده به سطح دیواره یعنی :

$$KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = hA(T_W - T_\infty) \quad (3-17)$$

و با توجه به معادله (۳-۱۵) معادله (۳-۱۷) به صورت زیر خواهد شد .

$$Aq^\circ L = hA(T_W - T_\infty) \quad (3-18)$$

بنابراین دمای سطح دیواره برابر خواهد شد .

$$T_W = T_\infty + \frac{q^\circ L}{h} \quad (3-19)$$

و با جایگذاری معادله (۳-۱۹) در معادله (۳-۱۳) معادله توزیع دما در دیواره بر اثر جابجایی سیال مجاور به صورت ذیل خواهد شد .

$$T = T_\infty + \frac{q^\circ L}{h} + \frac{q^\circ}{2K} (L^2 - x^2) \quad (3-20)$$

اگر دمای ماکزیمم دیواره را خواسته باشیم کافی است در معادله (۳-۲۰) مقدار x را برابر صفر قرار دهیم
یعنی دمای ماکزیمم در وسط دیواره خواهد بود :

$$x = 0 \rightarrow T_{max} = T_\infty + q^\circ L \left(\frac{1}{h} + \frac{L}{2K} \right) \quad (3-21)$$

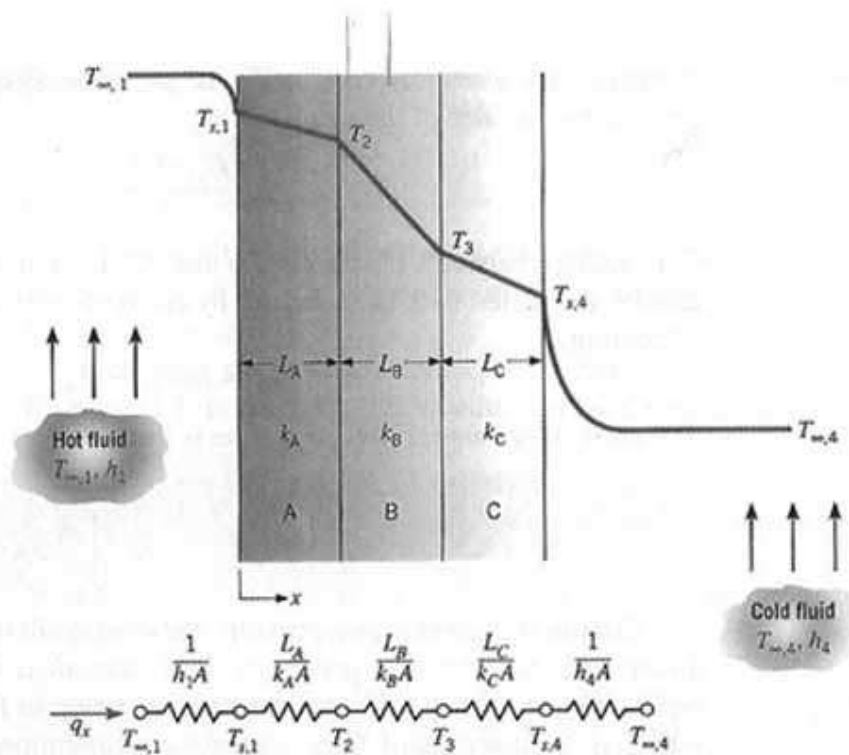
با توجه به مطالب بیان شده در مرکز دیواره ، گرادیان دما صفر است لذا این سطح را می توان ادیاباتیک در نظر گرفت به عبارت روشنتر هر گاه یک طرف دیواره عایق باشد حداکثر دما در همان سمت ظاهر می شود.
به همین ترتیب انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی با چشمه حرارتی ثابت با شیب دما در داخل دیواره
یعنی $T_1 > T_2$ باشد.

$$T = -\frac{q^\circ}{2K} X^2 + \left(\frac{q^\circ L}{K} - \frac{T_1 - T_2}{2L}\right) X + T_1$$

$$T_{max} = T_1 + \frac{q^\circ}{2K} \left[L - \frac{K}{q^\circ} \left(\frac{T_1 - T_2}{2L} \right) \right]^2$$

۳-۵: دیواره مرکب

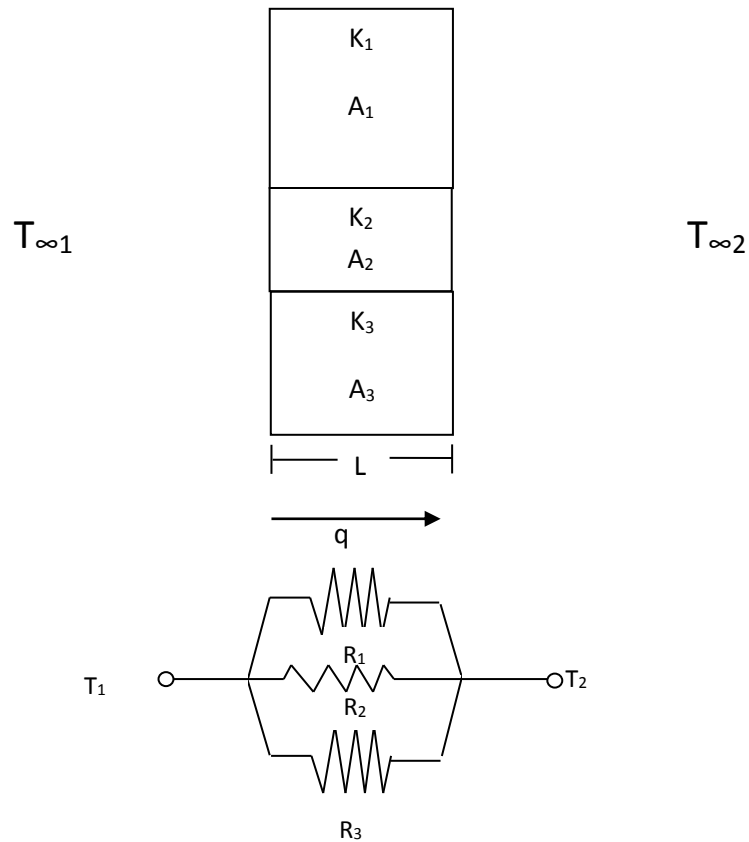
در صورتیکه دیواره از چند لایه با ضریب هدایت حرارتی و ابعاد مختلف به صورتهای سری یا موازی و یا ترکیبی تشکیل شده باشد برای محاسبه شدت جریان انتقال حرارت، می توان از مدارهای معادل حرارتی استفاده کرد اشکال (۳-۴) و (۳-۵)



شکل (۳-۴) مدل مدار حرارتی معادل برای دیواره مرکب سری

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} \quad (3 - 22)$$

$$\Sigma R = \frac{1}{h_i A} + \frac{L_A}{K_A A} + \frac{L_B}{K_B A} + \frac{L_C}{K_C A} + \frac{1}{h_o A} \quad (3-23)$$



شکل (۳-۵) مدل مدار حرارتی معادل برای دیواره مرکب موازی

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R}$$

$$\Sigma R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

بنابراین در مقاومت‌های سری: مقاومت معادل برابر است با

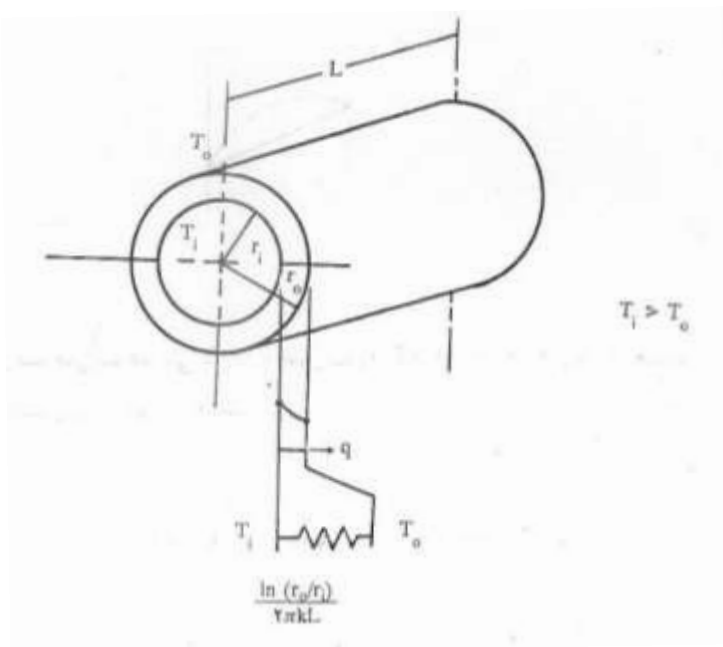
$$\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

و در مقاومت‌های موازی: مقاومت معادل برابر است با

$$\Sigma R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

۳-۶: انتقال حرارت هدایتی پایدار، یک بعدی، بدون چشمه حرارتی، در استوانه

در سیستم های استوانه ای معمولاً گرادیان دما فقط در جهت شعاع وجود دارد. لذا به کمک قانون فوریه میشود معادلات حاکم بر اشکال استوانه ای را تجزیه و تحلیل کرد. برای این کار شکل (۳-۶) را در نظر میگیریم بطوریکه سطوح داخلی و خارجی استوانه در دماهای ثابت T_0 و T_i شعاع های داخلی و خارجی آن به ترتیب r_0 و r_i ضریب هدایت حرارتی آن ثابت K و بواسطه اختلاف دمای فیما بین سطوح داخلی و خارجی استوانه، جریان انتقال حرارت هدایتی برقرار باشد. معادله توزیع دما در دیواره استوانه، را نیز می توان با دوبار انتگرالگیری از معادله (۱۵-۲) و با بکار بردن شرایط مرزی استوانه، ثابت های انتگرال را تعیین نمود و سپس با مشتق گیری از معادله توزیع دما برحسب تغییرات شعاع، گرادیان دما را بدست آورده و با جایگذاری گرادیان دما در معادله (۱-۱) شدت حرارت منتقل شده را تعیین نمود.



شکل (۳-۶) مدل هدایت حرارتی در استوانه

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما استوانه به صورت زیر خواهد بود :

$$dT = C_1 \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad T = C_1 \ln r + C_2 \quad (3 - 24)$$

$$\text{B.C. 1} \quad r = r_i \quad T = T_i \quad \rightarrow \quad T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \quad (3 - 25)$$

$$\text{B.C. 2} \quad r = r_o \quad T = T_o \quad \rightarrow \quad T_o = C_1 \ln r_o + C_2 \quad (3 - 26)$$

با حل معادلات (۳-۲۵) و (۳-۲۶) در یک دستگاه خواهیم داشت

$$\begin{cases} T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \\ T_o = C_1 \ln r_o + C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_i}{r_o}}$$

$$C_2 = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \ln r_i$$

با جایگذاری مقدار C_1 و C_2 در جواب عمومی معادله توزیع دما (۳-۲۴) و با توجه به اینکه $T_i > T_o$ برای تعیین

شدت حرارت منتقل شده از جداره استوانه بواسطه اختلاف دما با استفاده از معادله (۱-۱) خواهیم داشت :

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i} \quad (3 - 27)$$

$$q = -KA \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} * \frac{1}{r}$$

$$q = -K(2\pi rL) \left(-\frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} * \frac{1}{r} \right)$$

$$q = (2\pi L)K \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \quad (3 - 28)$$

با توجه به تعریف مقاومت حرارتی ، مقاومت حرارتی هدایتی استوانه به صورت زیر خواهد بود:

$$R_{cond} = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi LK} \quad (3 - 29)$$

همچنین با توجه به اینکه مقاومت های حرارتی هدایتی و جابجایی دیوارهای مرکب استوانه همواره به صورت سری هستند داریم :

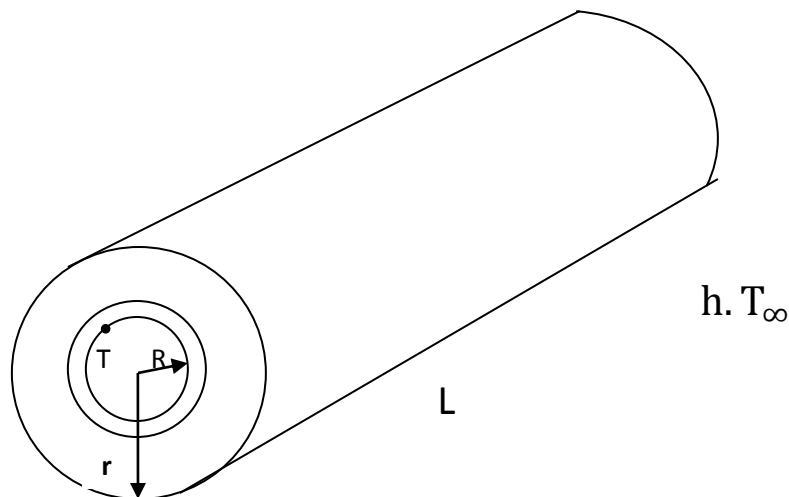
$$\sum R_{cond} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \frac{1}{2\pi LK_i} \quad (3 - 30)$$

$$\sum R_{conv} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi Lr_i K_i} \quad (3 - 31)$$

۳-۷: شعاع بحرانی استوانه

در دیواره ساده ، با افزایش ضخامت عایق ، مقاومت حرارتی افزایش می یابد ولی تلفات حرارتی کم می شود. اما در اشکال استوانه ای و کروی با افزایش ضخامت عایق ، مقاومت جابجایی و مقاومت هدایتی اثرات متقابلی روی هم دارند . به طوریکه با افزایش ضخامت عایق ، مقاومت جابجایی کاهش می یابد ولی

مقاومت هدایتی افزایش می یابد لذا ناچاریم شعاع بحرانی را مورد تجزیه و تحلیل قراردهیم بطوریکه در شعاع بحرانی مقاومت حرارتی حداقل و در نتیجه تلفات حرارتی حداکثر مقدار خود را خواهد داشت شکل (۳-۷)



شکل (۳-۷) مدل استوانه تو خالی عایق پیچیده شده

شکل (۳-۷) لوله ای به شعاع R که دمای سطح آن T بوسیله عایقی که ضریب هدایت حرارتی آن ثابت K است پوشیده شده است .

می خواهیم رابطه بین ضخامت لایه عایق و میزان اتلاف حرارتی را به شرطی که دمای سیال مجاور لوله T_{∞} و ضریب جابجایی آن ثابت و برابر h است را بدست آوریم . برای این منظور کافی است معادله شدت انتقال حرارت را برای شکل (۳-۷) بنویسیم .

$$q = \frac{T - T_{\infty}}{\frac{\ln \frac{R}{r}}{2\pi L K} + \frac{1}{2\pi r L h}} \quad (3 - 31)$$

حال معادله (۳-۳۱) را با توجه به قوانین \ln به فرم ساده تری بازنویسی می کنیم .

$$q = \frac{2\pi LK(T - T_{\infty})}{\ln r - \ln R + \frac{K}{hr}} \quad (3 - 32)$$

رابطه (۳-۳۲) شدت اتلاف حرارتی q را برحسب شعاع لایه عایق r نشان می دهد با مشتق گیری از رابطه (۳-۳۲) و تساوی قرار دادن آن با صفر $\left(\frac{dq}{dr} = 0\right)$ و حل رابطه مذکور بر حسب r شعاع بحرانی لایه عایق استوانه بدست می آید .

$$\frac{dq}{dr} = 2\pi LK(T - T_{\infty}) \frac{-\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{hr^2}\right)}{\left(\ln r - \ln R + \frac{K}{hr}\right)^2} = 0 \quad (3 - 33)$$

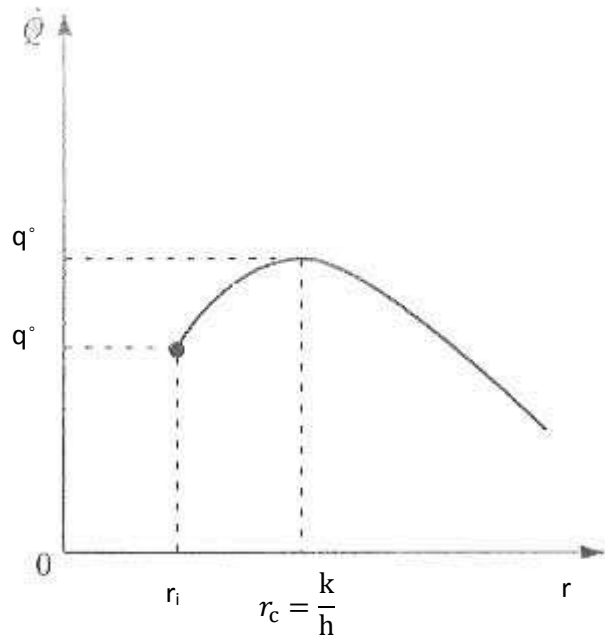
در معادله (۳-۳۳) برای اینکه $\frac{dq}{dr} = 0$ باشد کافی است داخل پرانتز $\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{hr^2}\right)$ برابر صفر باشد .

$$\frac{1}{r} - \frac{k}{hr^2} = 0 \rightarrow \frac{r^2}{r} = \frac{k}{h} \rightarrow r_c = \frac{k}{h} \quad (3 - 34)$$

بنابراین شعاع بحرانی لایه عایق استوانه برابر است با

$$r_c = \frac{k}{h} \quad (3 - 35)$$

برای اطمینان از اینکه نقطه r_c ماکزیمم و یا مینیمم منحنی تغییرات است کافی است از رابطه (۳-۳۳) مجدداً مشتق بگیریم و آنرا تعیین علامت کنیم . خواهیم دید که این مقدار همیشه منفی است لذا نقطه r_c ماکزیمم منحنی است بنابراین براحتی می توان ثابت کرد که در شعاع r_c حداقل مقدار مقاومت حرارتی وجود دارد از طرفی معادله (۳-۳۵) مفهوم شعاع بحرانی عایق را بیان می کند. چنانچه شعاع خارجی کمتر از مقدار شعاع بحرانی باشد . آنگاه هر افزایشی در ضخامت عایق ، سبب افزایش اتلاف حرارت می شود و برعکس اگر شعاع خارجی بیشتر از شعاع بحرانی باشد هر افزایشی در ضخامت عایق سبب کاهش اتلاف حرارتی میشود. لذا مفهوم اصلی شعاع بحرانی این است که برای مقادیر به اندازه کافی کوچک h با افزودن عایق ، اتلاف حرارتی جابجایی به دلیل افزایش مساحت رویه افزایش می یابد .

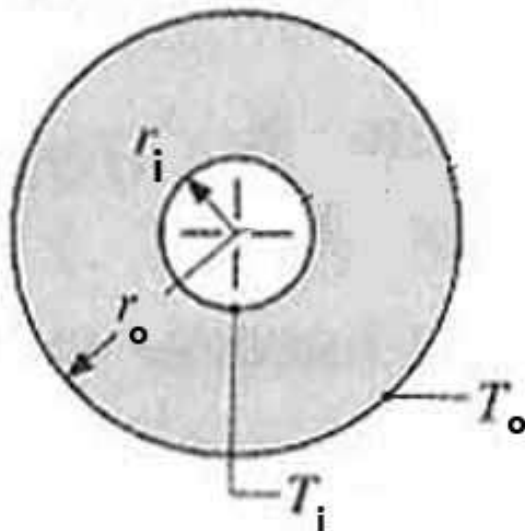


شکل (۳-۸) مدل تغییرات اتلاف حرارتی لوله با افزایش شعاع عایق

۳-۸: انتقال حرارت هدایتی پایدار ، یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی ، در کره

در سیستم های کره گرادیان دما فقط در جهت شعاع می باشد لذا با کمک قانون فوریه و معادله (۲-۲۰) می توان معادله توزیع دما در داخل دیواره کره و شدت حرارت انتقال یافته را بدست آورد بدین منظور کافی است کره ای توخالی را که سطوح داخلی و خارجی آن در دماهای T_0 و T_i و شعاع داخلی و خارجی آن r_0 و r_i ضریب هدایت حرارتی کره ثابت K است را در نظر گرفت لذا بواسطه اختلاف دمای سطوح داخلی و خارجی کره ، جریان انتقال حرارت برقرار می باشد شکل (۳-۹) معادله توزیع دما در دیواره کره را نیز با دوبار مشتق گیری از معادله (۲-۲۰) و با بکار بردن شرایط مرزی جهت تعیین ثابتهای انتگرال و با مشتق گیری از معادله توزیع دما بر حسب تغییرات شعاع ، گرادیان دما بدست آمده و با جایگزینی گرادیان دما در معادله فوریه (۱-۱) ، شدت حرارت منتقل شده بدست می آید .

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$



شکل (۳-۹) مدل هدایت حرارتی در کره

$$r^2 \frac{dT}{dr} = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$dT = C_1 \frac{dr}{r^2}$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما کره به صورت زیر خواهد بود :

$$T = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3 - 36)$$

$$B.C.1 \quad r = r_i \quad T = T_i \rightarrow T_i = -\frac{C_1}{r_i} + C_2$$

$$B.C.2 \quad r = r_o \quad T = T_o \rightarrow T_o = -\frac{C_1}{r_o} + C_2$$

با حل همزمان دو معادله فوق در دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} T_i = -\frac{C_1}{r_i} + C_2 \\ T_o = -\frac{C_1}{r_o} + C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}}$$

$$C_2 = T_i - \frac{1}{r_i} \left[\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}} \right] \quad (3 - 37)$$

حال با جایگذاری مقدار C_1 و C_2 از معادله (۳-۳۷) در معادله جواب عمومی (۳-۳۶) و با توجه به $T_i > T_o$ معادله توزیع دما کره بدست می آید .

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_i} \right) \quad (3 - 38)$$

برای تعیین شدت حرارت منتقل شده از معادله فوریه (۱-۱) استفاده می کنیم .

$$q = -KA \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}} * \frac{1}{r^2}$$

$$q = -K4\pi r^2 \left(-\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}} \right) * \frac{1}{r^2}$$

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{r_o - r_i}{4\pi K r_i r_o}} \quad (3 - 39)$$

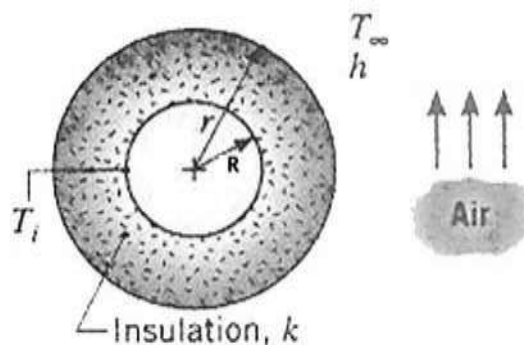
لذا با توجه به تعریف مقاومت حرارتی ، مقاومت حرارتی هدایتی و جابجایی دیواره های مرکب کره به صورت زیر خواهد بود :

$$\sum R_{\text{cond}} = \sum_{i=1}^n \frac{r_{i+1} - r_i}{4\pi K r_{i+1} r_i}$$

$$\sum R_{\text{conv}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi r_i^2 h_i} \quad (3 - 40)$$

۳-۹ : شعاع بحرانی کره

برای محاسبه شعاع بحرانی کره کافی است کره ای توخالی به شعاع R توسط عایقی با ضریب هدایت حرارتی ثابت K و شعاع خارجی r با دمای سطح خارجی کره T_i و دمای سطح خارجی عایق T_∞ و ضریب جابجایی h را در نظر بگیرید . شکل (۳-۱۰)



شکل (۳-۱۰) مدل کره توخالی عایق پیچیده شده

با توجه به شکل (۳-۱۰) شدت انتقال حرارت به صورت زیر خواهد بود :

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{r - R}{4K\pi r R} + \frac{1}{4\pi r^2 h}} \quad (3 - 41)$$

در رابطه (۳-۴۱) شدت اتلاف حرارتی q را بر حسب شعاع لایه عایق r نشان می دهد. با مشتق گیری

از رابطه (۳-۴۱) بر حسب r و تساوی قرارداد آن با صفر ($\frac{dq}{dr} = 0$) و حل رابطه مذکور بر حسب r

شعاع بحرانی لایه عایق کره بدست می آید :

$$q = \frac{4\pi(T_i - T_\infty)}{\frac{1}{KR} - \frac{1}{Kr} + \frac{1}{hr^2}}$$

$$\frac{dq}{dr} = 0 \rightarrow \frac{0 - 4\pi(T_i - T_\infty) \left(0 + \frac{1}{Kr^2} - \frac{2}{hr^3}\right)}{\left(\frac{1}{KR} - \frac{1}{Kr} + \frac{1}{hr^2}\right)^2} = 0 \quad (3 - 42)$$

در معادله (۳-۴۲) برای $\frac{dq}{dr} = 0$ باشد کافی است $\left(\frac{1}{Kr^2} - \frac{2}{hr^3}\right)$ برابر صفر باشد.

$$\frac{1}{Kr^2} - \frac{2}{hr^3} = 0 \rightarrow \frac{r^3}{r^2} = \frac{2k}{h} \rightarrow r_c = \frac{2k}{h}$$

بنابراین شعاع بحرانی لایه عایق کره برابر است با :

$$r_c = \frac{2k}{h} \quad (3 - 43)$$

۳-۱۰: انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته

با توجه به قانون سرمایش نیوتن پس از تعیین T_∞ و T_w دو روش برای افزایش انتقال حرارت وجود دارد

۱- افزایش ضریب جابجای حرارتی h

۲- افزایش سطح انتقال حرارت

بدیهی است افزایش h از طریق ایجاد جریان جابجایی اجباری با مغشوش نمودن سرعت جریان سیال که آن مستلزم بکار بردن ماشین آلات از قبیل فن ، پمپ است که ممکن است این عمل نیز کافی نباشد . اما افزایش سطح انتقال حرارت از طریق افزودن سطوح اضافی به نام پره عملی امکان پذیر خواهد بود .

۱۱-۳ : محاسبات انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته

جهت محاسبه انتقال حرارت جابجایی از سطوح جانبی پره با توجه به قانون سرمایش نیوتن نیاز به داشتن دمای پای پره T_0 می باشد از طرف دیگر دمای پای پره از حل معادله دیفرانسیل عمومی برای پره ها بدست می آید لذا برای سادگی محاسبات معادله دیفرانسیل فرض می گیریم :

۱ - انتقال حرارت پایدار باشد

۲ - ضریب هدایت حرارتی (K) و دمای محیط اطراف پره (T_∞) ثابت باشد

۳ - ضریب جابجایی حرارتی (h) ثابت باشد

۴ - انتقال حرارت به محیط فقط توسط جابجایی انجام گیرد

۵- پره نازک است نیمی $\frac{ht}{k} < 1/2$ پس می توان گفت دما فقط در یک جهت تغییر می کند $T=f(x)$

۶- دمای پای پره یکنواخت است T_0

۷ - مقاومت بین پره و جداره اصلی قابل صرف نظر کردن است

شکل (۱۰-۳) مشخصات هندسی یک پره مکعب مستطیل را نشان می دهد که پای آن برابر T_0 و ثابت است و سطح مقطع پره در هر مقطع ثابت برابر $A=tz$ و محیط پره $P=2(t+z)$ می باشد. حال اگر بقای حرارتی را برای یک جزء حجمی پره که در فاصله x از دیوار قرار داشته و ضخامت آن dx می باشد را درحالت پایداری حرارتی بنویسیم خواهیم داشت

نرخ انتقال حرارت جابجایی + نرخ انرژی خروجی از $x+d$ برابر نرخ انرژی ورودی در نقطه x

$$-KA \frac{dT}{dx} \Big|_x = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + hpdx(T - T_\infty) \quad (3-44)$$

$$-KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} = KA \frac{dT}{dx} \Big|_x + \frac{d}{dx} \left(KA \frac{dT}{dx} \right) dx$$

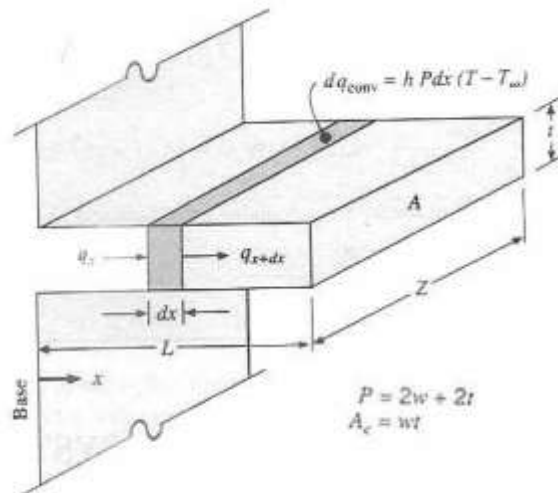
$$KA \frac{d^2 T}{dx^2} dx - hpdx(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp}{KA} (T - T_\infty) = 0 \quad (3-45)$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۴۵) با کمک دو شرط مرزی می توان توزیع دما را پیدا کرد. برای اینکار کافی است تغییر متغیرهای $\theta = T - T_\infty$ و $m^2 = \frac{hp}{KA}$ را در نظر بگیریم معادله (۳-۴۵) به صورت زیر

خواهد بود:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$$



شکل (۳-۱۱) مدل مشخصات یک پره ساده متصل به دیواره مسطح

حالت اول : پره بلند باشد شرایط مرزی آن عبارتند از

$$B.C.1 \quad x = 0 \quad T = T_o \quad \theta = \theta_o = T_o - T_\infty$$

$$B.C.2 \quad x \rightarrow \infty \quad T = T_\infty \quad \theta = 0$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما پره بلند به صورت زیر خواهد بود :

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \quad (3 - 46)$$

$$\theta_o = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \theta_o \quad C_2 = 0$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (3 - 46)

با جایگذاری مقادیر C_1, C_2 در معادله جواب عمومی (۳-۴۶) معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد بود .

$$T = T_\infty + (T_o - T_\infty) e^{-mx} \quad (3 - 47)$$

حرارتی که توسط جابجایی از جزء dx به سیال اطراف منتقل می شود برابر است با

$$dq = hp(T_o - T_\infty) dx$$

$$q = \int_0^\infty hp (T_o - T_\infty) e^{-mx} dx$$

$$q = \sqrt{hpKA}(T_o - T_\infty) \quad (3 - 48)$$

بازده حرارتی پره طبق تعریف برابر است با نسبت حرارت حقیقی خارج شد از سطح پره به حرارت ایده آل خارج شده از تمامی سطح پره در دمای ثابت پای پره

$$q_{\text{ایده آل}} = hpL(T_o - T_\infty) \quad (3 - 49)$$

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \quad (3 - 50)$$

حالت دوم : نوک پره عایق باشد شرایط مرزی عبارتند از

$$B.C.1 \quad x = 0 \quad T = T_o \quad \theta = \theta_o$$

$$B.C.2 \quad x = l \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad \frac{d\theta_o}{dx} = 0$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما پره ای که نوک آن عایق است به صورت زیر خواهد بود :

$$\theta = C_1 \cosh m(l - x) + C_2 \sinh m(L - x) \quad (3 - 51)$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله جواب عمومی (۳-۵۱) و تغییر متغیر $\theta = T - T_\infty$ خواهیم داشت :

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{\theta_o}{\cosh ml}$$

با جایگذاری مقدار C_1 و C_2 در معادله جواب عمومی (۳-۵۱)

$$T = T_\infty + \frac{(T_o - T_\infty)}{\cosh ml} \cosh m(l - x) \quad (3 - 52)$$

حرارتی که توسط جابجایی از جز dx به سیال اطراف منتقل می شود برابر است با :

$$q = \sqrt{hpKA} (T_o - T_\infty) \tanh mL \quad (3 - 53)$$

$$\eta_f = \frac{\tanh mL}{mL} \quad \text{بازده حرارتی پره} \quad (3 - 54)$$

حالت سوم : در نوک پره انتقال حرارت فقط جابجایی باشد شرایط مرزی عبارتند از

از آنجائیکه حل معادله دیفرانسیل و روشهای ریاضی مشکل خواهند بود استفاده از نمودار راندمان پره خیلی ساده تر است بطوریکه محاسبات تحلیلی نشان داده است که اگر پره به اندازه کافی طولانی باشد $L \gg t$

در آن صورت راندمان پره را میتوان بر حسب پرامتر $L \sqrt{\frac{2h}{kt}}$ بیان کرد.

$$B.C.1 \quad x = 0 \quad T = T_o \quad \theta = \theta_o$$

$$B.C.2 \quad x = L \quad -KA \frac{dT}{dx} \Big|_L = hA (T_L - T_\infty)$$

لذا جواب عمومی معادله توزیع دما پره ای که در نوک آن انتقال حرارت جابجایی باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta = C_1 \cosh m(l - x) + C_2 \sinh m(l - x) \quad (3 - 55)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در جواب عمومی معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد شد.

$$T = T_\infty + (T_o - T_\infty) \frac{\cosh m(L - x) + \left(\frac{h}{km}\right) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{km}\right) \sinh mL}$$

از آنجائیکه سطوح پره دار از دو قسمت سطح زیر پوشش پره و سطح آزاد تشکیل شده اند مقدار حرارتی که از سطوح پره دار منتقل می شوند برابر است با مجموع حرارتی که از سطوح بدون پره و سطوح پره انتقال می یابد

$$q_T = q_f + q_{uf} \quad (3 - 56)$$

$$q_f = \eta_f h A_f (T_o - T_\infty) \quad (3 - 57)$$

A_f : سطوح پره ها

$$q_{uf} = A_{uf} h (T_o - T_\infty) \quad (3 - 58)$$

A_{uf} : سطوح ما بین پره ها

$$q_o = hA_o(T_o - T_\infty) \quad (3 - 59)$$

A_o سطح جانبی

ε ضریب تاثیر پره

$$\varepsilon = \frac{q_{ToT}}{q_o} \quad (3 - 60)$$

نکته: مقدار راندمان پره ها را با مراجعه به نمودارهای (۲-۱) و (۲-۲) ضمیمه ۲ کتاب می توان تعیین کرد.

۱۲-۳: خلاصه

۱- در هدایت پایدار یک بعدی ، بدون چشمه حرارتی در یک دیواره ساده نرخ انتقال حرارت و شار حرارت مستقل از x هستند

۲- در هدایت پایدار ، یک بعدی ، بدون چشمه در یک استوانه نرخ انتقال حرارت در جهت شعاع ثابت است ولی شار حرارتی ثابت نیست

۳- مقاومت حرارتی یک محیط به هندسه و خواص حرارتی آن محیط بستگی دارد

۴- با وجود چشمه حرارتی در داخل دیواره های ساده ، استوانه ، کره نمی توان از مفهوم مقاومت حرارتی استفاده کرد

۵- در شرایط ثابت حرارتی در دیواره های مرکب انتقال حرارت در هر لایه ثابت است زیرا حاصلضرب سه عبارت $q = KA \frac{dT}{dx}$ ثابت است

۶- برای دیوار ساده شعاع بحرانی وجود ندارد و با افزایش ضخامت عایق مقاومت حرارتی کل افزایش مییابد

۷- پره های مثلثی و سهمی بعلت کمی وزن کارایی بیشتری نسبت به پره های دیگر دارند

۸- اگر طول پره به سمت بینهایت برود راندمان پره صفر خواهد شد .

۹- اگر طول پره به سمت صفر برود $L=0$ آنگاه راندمان پره ۱۰۰٪ خواهد شد

۱۰- نسبت نرخ انتقال حرارت با وجود پره به نرخ انتقال حرارت بدون پره را ضریب تاثیر پره گویند .

۱۱- زمانی راندمان پره ماکزیمم است که ضریب گرمایی پره بیشتر و ضریب جابجایی سیال مجاور پره h

کمتر باشد

۱۲- در مبادله کننده های حرارتی مایع - گاز پره سمت سیال یا گازی که h کمتری دارد نصب می شود.

۱۳- در شعاع بحرانی مقاومت حرارتی حداقل و در نتیجه اتلاف حرارتی حداکثر خواهد بود .

۱۴- برای دیواره مسطح شعاع بحرانی وجود ندارد با افزایش ضخامت عایق حرارتی گرمایی کل افزایش مییابد .

فصل چهارم

انتقال حرارت هدایتی ، چند بعدی

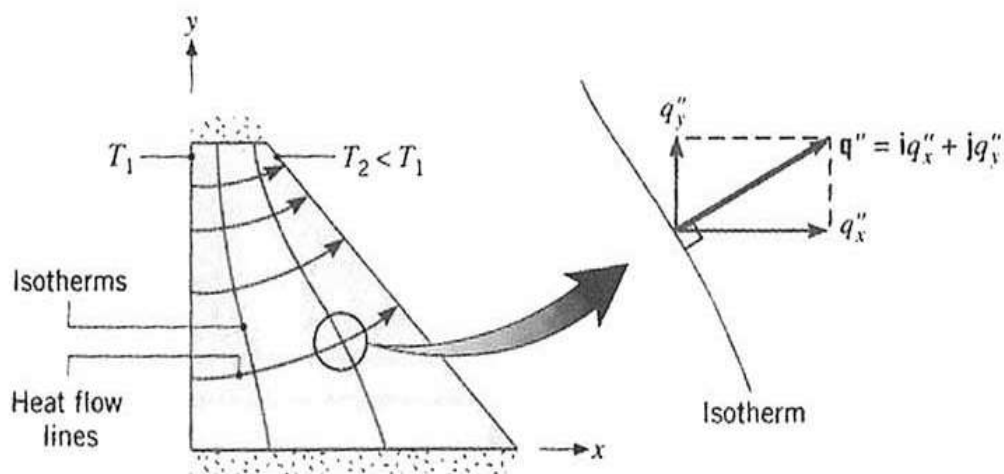
۴-۱: مقدمه

در فصول قبلی انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایدار را مورد بررسی قرار دادیم در این فصل هدایت حرارتی پایدار دو یا سه بعدی را بررسی می کنیم حل این معادلات جز در حالات ساده مشکل و یا غیر ممکن است

۴-۲: روش های تحلیلی حل معادلات انتقال حرارت هدایتی

در این روش معادلات حاکم بر انتقال حرارت با کمک روش های تحلیلی ریاضی ، مانند تبدیل لاپلاس ، جداسازی متغیرها حل می شود

معادله عمومی هدایت حرارتی پایدار بدون چشمه حرارتی در یک سیستم دوبعدی ساده ، مطابق معادله (۲-۹) خواهد بود شکل (۴-۱)



شکل (۴-۱) مدل نمایش جریان حرارت دو بعدی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

برای حل این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، از روش جدا سازی متغیرها استفاده می کنیم لذا جواب عمومی معادله به صورت حاصلضرب دو تابع جداگانه از x, y خواهد بود .

$$T = X(x) * Y(y) \quad (4 - 1)$$

با مشتق گیری از معادله (۴-۱) بر حسب x و y خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (4 - 2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \quad (4 - 3)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۲) و (۴-۳) در معادله (۴-۱) خواهیم داشت

$$X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \quad (4 - 4)$$

و با ساده سازی و دسته بندی عبارت هم خانواده خواهیم داشت

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{-1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda^2 \quad (4 - 5)$$

که λ^2 مقداری است ثابت که بنام ثابت جداسازی نامیده می شود

حال معادله (۴-۵) تبدیل ، به دو معادله دیفرانسیل معمولی می شود و با شرط $\lambda^2 > 0$ جواب عمومی آنها به صورت زیر خواهد شد :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \rightarrow X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (4 - 6)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0 \rightarrow Y = C_3 \cosh \lambda y + C_4 \sinh \lambda y \quad (4 - 7)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۶) و (۴-۷) در معادله (۴-۱) جواب عمومی معادله هدایت دو بعدی پایدار بدون چشمه حرارتی به صورت زیر خواهد بود

$$T = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) (C_3 \cosh \lambda y + C_4 \sinh \lambda y) \quad (4 - 8)$$

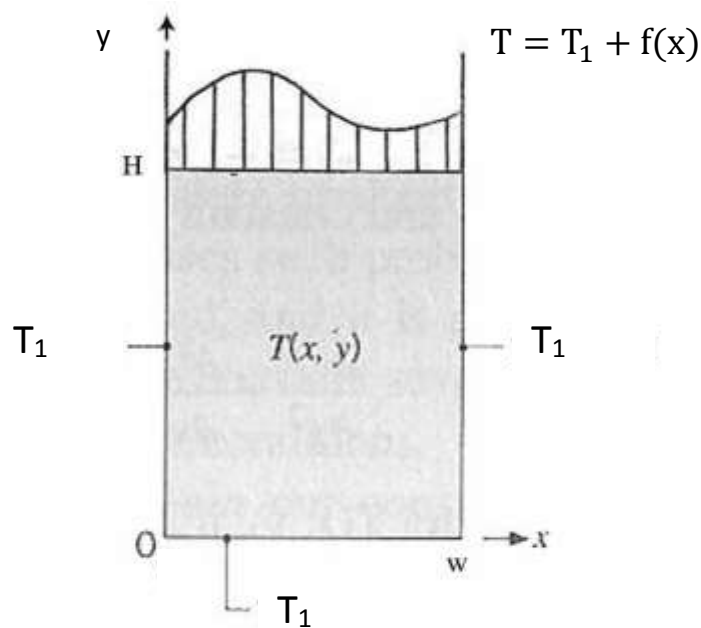
۱- لازم به توضیح است که در معادله (۴-۸) C_1 و C_2 و C_3 و C_4 ثابتهای معادله بوده که بر حسب نوع مسئله و شرایط مرزی محاسبه می گردند

۲- مقدار λ^2 نامعلوم است که برای هر مساله خاص باید مقدار آن محاسبه گردد

۳- علامت λ^2 نیز نامشخص است

۳-۴: حل تحلیلی معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی پایدار دو بعدی، بدون چشمه حرارتی، در حالت خاص

با توجه به شکل (۲-۴) که سه ضلع صفحه در دمای ثابت T_1 و ضلع دیگر صفحه دارای دما $T = T_1 + f(x)$ باشد، معادله توزیع دما به روش تحلیلی به صورت زیر خواهد بود.



شکل (۲-۴) مدل هدایت حرارتی دو بعدی پایدار بدون چشمه حرارتی

این صفحه بیانگر سطح مقطع یک ستون است لذا در جهت عمود به صفحه (محور Z) شیب دما وجود

ندارد. ضمناً ضخامت صفحه را واحد در نظر می گیریم

جواب عمومی چنین شکل هندسی به صورت زیر خواهد بود

$$T = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) (C_3 \cosh \lambda y + C_4 \sinh \lambda y) \quad (4 - 9)$$

برای حل معادله (۴-۹) کافی است تغییر متغیر $\theta = T - T_1$ را در نظر بگیرید و با اعمال این تغییر متغیر معادله (۴-۹) به معادله (۴-۱۰) تبدیل می شود. حال با اعمال شرایط مرزی شکل (۴-۲) خواهیم داشت:

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) (C_3 \cosh \lambda y + C_4 \sinh \lambda y) \quad (4 - 10)$$

$$B.c.1 \quad x = 0 \quad T = T_1 \quad \theta = 0$$

$$B.c.2 \quad y = 0 \quad T = T_1 \quad \theta = 0$$

$$B.c.3 \quad x = w \quad T = T_1 \quad \theta = 0$$

$$B.c.4 \quad y = H \quad T = T_1 + f(x) \quad \theta = f(x)$$

با جاگذاری شرط اول در معادله (۴-۱۰) داریم:

$$B.c.1 \quad x = 0 \quad \theta = 0$$

$$0 = (C_1 + 0) (C_3 \cosh \lambda y + C_4 \sinh \lambda y)$$

$$C_1 = 0$$

با جایگذاری شرط دوم در معادله (۴-۱۰) خواهیم داشت

$$B.c.2 \quad y = 0 \quad \theta = 0$$

$$0 = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) (C_3 + 0)$$

$$C_3 = 0$$

لذا معادله (۴-۱۰) به شکل زیر خواهد بود

$$\theta = C_2 \sin \lambda x C_4 \sinh \lambda y$$

$$C_2 * C_4 = C$$

اگر $C_2 * C_4$ را C در نظر بگیریم یعنی

معادله مذکور به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta = C \sin \lambda x \sinh \lambda y \quad (4 - 11)$$

با جایگذاری شرط مرزی ۳ در معادله (۴-۱۱) خواهیم داشت

$$B.c.3 \quad x = w \quad \theta = 0$$

$$0 = C \sin \lambda w \sinh \lambda y \quad (4-12)$$

در معادله (۴-۱۲) مقدار C و مقدار $\sin \lambda y$ برابر صفر نیست لذا ناچاراً باید مقدار $\sin \lambda w = 0$ باشد.

$$\lambda w = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{w}$$

پس به ازای هر n یک مقدار λ و یک جواب برای معادله (۴-۱۱) داریم و جواب کل، مجموع تمام جوابهاست بنابراین

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{w}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{w}y\right) \quad (4-13)$$

حال با جایگذاری شرط مرزی چهارم در معادله (۴-۱۱) خواهیم داشت:

$$B.c.4 : \quad y = H \quad \theta = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{w}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \quad (4-14)$$

از آنجائیکه می توان هر تابع $f(x)$ را به روش آنالیز فوری به صورت یک تابع سینوسی در فاصله $0 < x < w$

نوشت لذا خواهیم داشت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{w}x\right) * \frac{2}{w} \int_0^w f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{w}x\right) dx \quad (4-15)$$

حال با مقایسه دو معادله (۴-۱۴) و (۴-۱۵) خواهیم داشت

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) = \frac{2}{w} \int_0^w f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{w}x\right) dx$$

مقدار ثابت C_n برابر خواهد بود.

$$C_n = \frac{2}{w \sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} * \int_0^w f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) dx \quad (4-16)$$

حال با جایگذاری معادله (۴-۱۶) در معادله (۴-۱۳) و جایگذاری $\theta = T - T_1$ معادله توزیع دما برابر خواهد شد با:

$$T = T_1 + \frac{2}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} * \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) * \int_0^w f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) dx \quad (4-17)$$

با داشتن تابع $f(x)$ مقدار انتگرال محاسبه شده و معادله توزیع دما بدست خواهد آمد و با مشتق گیری از معادله توزیع دما بر حسب x و y گرادیان دما یعنی $\frac{\partial T}{\partial x}$ و $\frac{\partial T}{\partial y}$ بدست آمده و در معادله فوریه جایگذاری کنیم شدت انتقال حرارت بدست می آید.

در حالت خاص اگر $T = T_1 + f(x)$ برابر T_2 باشد یعنی مقدار $f(x) = T_2 - T_1$ باشد. در اینصورت معادله

توزیع دما در صفحه برابراست با

$$T = T_1 + \frac{2}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} * \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) * \int_0^w (T_2 - T_1) \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) dx \quad (4-18)$$

با محاسبه انتگرال (۴-۱۸) خواهیم داشت:

$$\int_0^w (T_2 - T_1) \sin\left(\frac{n\pi}{w} x\right) dx = (T_2 - T_1) \left[-\frac{w}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{w} x\right) \right]_0^w$$

$$= (T_2 - T_1) \frac{w}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] = \frac{2w}{n\pi} (T_2 - T_1)$$

$$\frac{1 - (-1)^n}{n} \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

با جایگذاری مقدار انتگرال محاسبه شده در معادله (۴-۱۸) معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد بود :

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{w}y\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \quad (4-19)$$

$$n=1,3,5$$

و با محاسبه گرادیان دما از معادله (۴-۱۹) یعنی $\frac{\partial T}{\partial x}$ و $\frac{\partial T}{\partial y}$ و جایگذاری آن در معادله فوریه : شدت انتقال

حرارت به شرح ذیل خواهد بود .

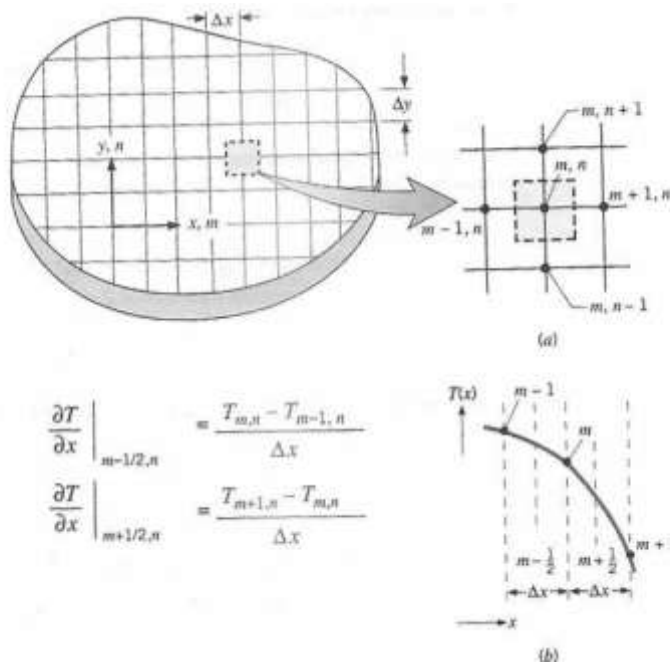
$$q = -\frac{8K}{\pi} (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \quad n \text{ فرد است} \quad (4-20)$$

۴-۴ : روشهای حل عددی انتقال حرارت هدایتی پایدار دو بعدی ، بدون منبع حرارتی

اساس این روش بر تفاضل محدود است لذا معادلات دیفرانسیل به صورت فرمولهای عددی در می آیند و با بکار گیری این فرمولها برای همه نقاط روی شکل یک دستگاه ، چند معادله ، چند مجهولی به دست میاید که همگی معادلات درجه اول هستند امروز به کمک نرم افزارهای کامپیوتری می توان دستگاه چند معادله چند مجهولی را حل نمود .

حالت ۱: اگر نقطه (m,n) در داخل صفحه باشد

صفحه مورد نظر را به صورت یک شبکه با خانه هایی به عرض ΔX و طول ΔY تقسیم بندی می کنیم هر قدر خانه های شبکه کوچکتر باشد دقت محاسبات بیشتر خواهد بود لذا $\Delta X = \Delta Y = L$ در نظر می گیریم و همه نقاط روی صفحه را با توجه به فاصله روی محور X با m و ارتفاع نقطه روی محور Y با n شماره گذاری می کنیم . شکل (۴-۳)



شکل (۳-۴) مدل نمایش حل عددی هدایت دو بعدی نقطه (m,n) داخل صفحه

با توجه به تعریف گرادیان

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 = \frac{T_{m+1n} - T_{mn}}{L} \quad (4 - 21)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_2 = \frac{T_{mn} - T_{m-1n}}{L} \quad (4 - 22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{1,2} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_2}{L} = \frac{T_{m+1n} - T_{mn} - 2T_{mn}}{L^2} \quad (4 - 23)$$

به همین ترتیب در جهت y داریم

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_3 = \frac{T_{mn+1} - T_{mn}}{l} \quad (4 - 24)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_4 = \frac{T_{mn} - T_{mn+1}}{l} \quad (4 - 25)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{3,4} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_3 - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_4}{L} = \frac{T_{mn+1} - T_{mn+1} - 2T_{mn}}{L^2} \quad (4-26)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۶) در معادله دو بعدی هدایت پایدار بدون منبع حرارتی معادله (۴-۹) خواهیم داشت :

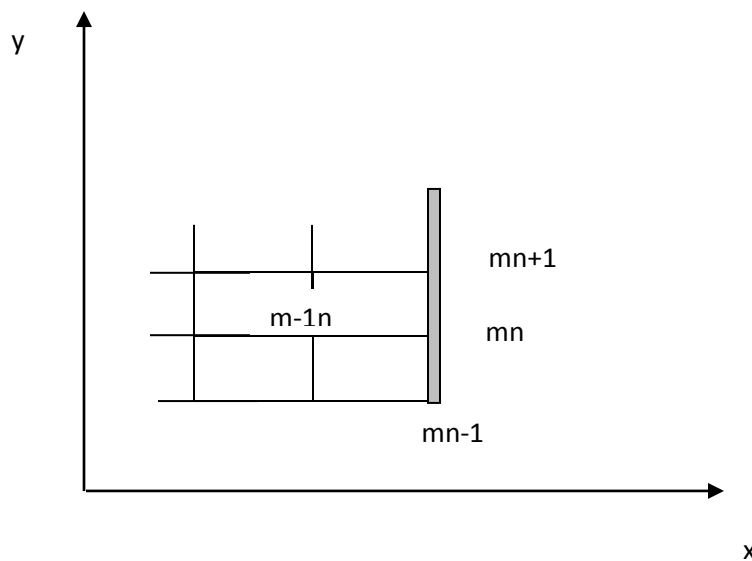
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4-27)$$

$$\frac{T_{mn+1} - T_{mn-1} - 2T_{mn}}{L^2} + \frac{T_{m+1n} - T_{m-1n} - 2T_{mn}}{L^2} = 0$$

$$T_{m+1n} + T_{m-1n} + T_{mn+1} + T_{mn-1} - 4T_{mn} = 0 \quad (4-28)$$

$$T_{mn} = \frac{1}{4}(T_{m+1n} + T_{m-1n} + T_{mn+1} + T_{mn-1}) \quad (4-29)$$

حالت ۲: نقطه (m,n) روی سطح عایق موازی محور yها قرار داشته باشد. شکل (۴-۴)



شکل (۴-۴) مدل نمایش حل عددی هدایت دو بعدی نقطه (m,n) روی یک سطح عایق عمودی

با توجه به اینکه سطوح جسم عایق شده باشد از آنجا که حرارتی از آن سطح نمی گذرد و شیب دما در آنجا صفر است لذا $\frac{\partial T}{\partial x}$ به طور مجازی در سمت راست سطح عایق صفحه دیگری می توان در نظر گرفت به طوری که این سطح محور تقارن روی صفحه باشد پس در سمت راست نقطه m, n نقطه ای مجازی مانند $m+1, n$ وجود دارد که دمای آن با نقطه $m-1, n$ در داخل صفحه برابر است یعنی

$$T_{m+1, n} = T_{m-1, n} \quad (4-30)$$

با جایگذاری معادله (۴-۳۰) در معادله (۴-۲۹) خواهیم داشت

$$T_{mn} = \frac{1}{4} (T_{m, n+1} + T_{m, n-1} + 2T_{m-1, n}) \quad (4-31)$$

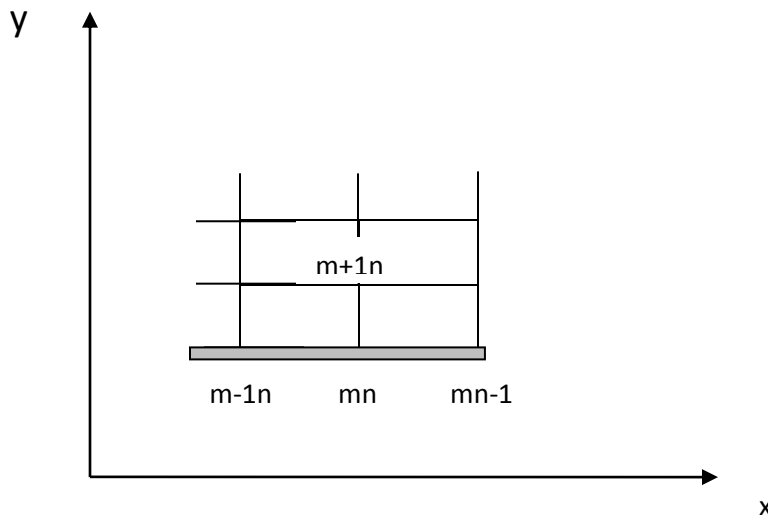
حالت ۳: نقطه (m, n) روی سطح عایق موازی محور x ها قرار داشته باشد. شکل (۴-۵)

با توجه به مطالب بیان شده فوق

$$T_{m, n+1} = T_{m, n-1} \quad (4-32)$$

با جایگذاری معادله (۴-۳۲) در معادله (۴-۲۹) خواهیم داشت

$$T_{m, n} = \frac{1}{4} (T_{m-1, n} + T_{m+1, n} + 2T_{m, n+1}) \quad (4-33)$$



شکل (۴-۵) مدل نمایش حل عددی هدایت دو بعدی نقطه (m, n) روی سطح عایق محور افقی

حالت ۴: نقطه (m,n) روی تقاطع دو سطح عایق باشد. شکل (۴-۶)

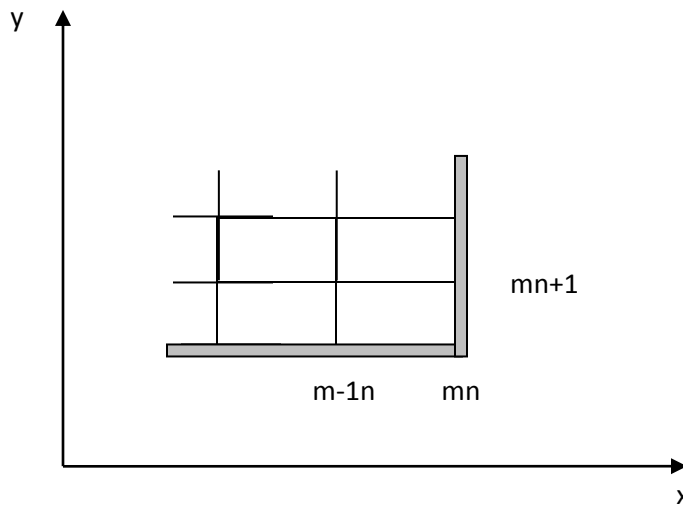
با توجه به مطالب بیان شده فوق

$$T_{m,n+1} = T_{m,n-1} \quad (4-34)$$

$$T_{m-1,n} = T_{m+1,n} \quad (4-35)$$

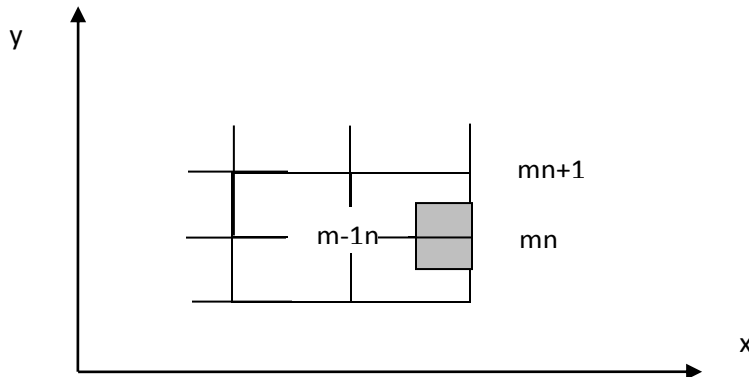
با جایگذاری معادله (۴-۳۴) و (۴-۳۵) در معادله (۴-۲۹) خواهیم داشت

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1}) \quad (4-36)$$



شکل (۴-۶) مدل نمایش حل عددی هدایت دو بعدی نقطه (m,n) روی تقاطع دو سطح عایق

حالت ۵: نقطه (m,n) روی سطحی که در مجاورت یک سیال قرار داده. شکل (۴-۷)



شکل (۴-۷) مدل نمایش عدد هدایت دو بعدی نقطه (m,n) روی سطحی با مجاورت سیال

برای این کار کافی است معادله توازن انرژی را برای نقطه (m,n) بنویسیم

$$q_{in} = q_{out} \quad (4 - 37)$$

$$q_{in} = q_x + q_y + q_z \quad (4 - 38)$$

$$q_x = K L / 2 \frac{T_{m-1n} - T_{mn}}{L} \quad \text{حرارت ورودی از سمت چپ} \quad (4 - 39)$$

$$q_y = K L / 2 \frac{T_{m+1n} - T_{mn}}{L} \quad \text{حرارت ورودی از سمت پایین} \quad (4 - 40)$$

$$q_z = K L \frac{T_{m-1n} - T_{mn}}{L} \quad \text{حرارت ورودی از سمت بالا} \quad (4 - 41)$$

$$q_{out} = hL(T_{mn} - T_{\infty}) \quad \text{حرارت خروجی از سطح به سیال} \quad (4 - 42)$$

با جایگذاری معادلات (4-38) و (4-39) و (4-40) در معادله (4-37) و ساده سازی خواهیم داشت :

$$T_{mn} = \frac{1}{\left(4 + \frac{2hL}{k}\right)} \left[T_{mn+1} + T_{mn-1} + 2T_{mn+1} + \frac{2hL}{k} T_{\infty} \right]$$

۴-۵: هدایت حرارتی سه بعدی

معادله دیفرانسیل هدایت حرارتی پایدار سه بعدی یا معادله لاپلاس بصورت زیر است

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب عمومی این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بصورت حاصلضرب سه تابع جداگانه از x, y, z فرض می شود یعنی:

$$T = X(x).Y(y).Z(z)$$

همانند روشی که برای حالت هدایت دو بعدی عمل کردیم و با توجه به شرایط مرزی خاص (شکل یک

میله نیمه محدود و با سطح مقطع چهار گوشه که اضلاع آن H, W است و دمای سطح آزاد میله در T_1

و دمای سطح جانبی آن در T_0 ثابت نگه داشته شده اند در نظر گرفت)

۶-۴: خلاصه

۱- در روش حل عددی در صورتیکه تولید انرژی q° در داخل صفحه داشته باشیم جمله q°/k هم به طرف اول معادله دیفرانسیل (۹-۲) اضافه می شود

۲- در صورتیکه جسم با یک سیال تبادل حرارت جابجایی داشته باشد از موازنه انرژی استفاده میکنیم

۳- در حالتی که روی سطح جسم جابجایی حرارتی داشته باشیم دمای T_{mn} برابر خواهد بود:

$$T_{mn} = \frac{a + B_i T_\infty}{b + B_i}$$

a : مجموع دماهای نقاط همسایه که به صورت هدایت انتقال می یابد

b : تعداد نقاط ذکر شده در a

$$B_i = \frac{hL}{k} : \text{عدد بدون بعد باید}$$

فصل پنجم

انتقال حرارت هدایتی ناپایدار

۱-۵: انتقال حرارت هدایتی ناپایدار

در این فصل مسائل هدایت حرارتی ناپایدار را مورد بررسی قرار می دهیم ، چگونگی تغییرات دما در درون سیستم بر حسب زمان و نیز شدت انتقال حرارت در سطوح جسم بر حسب زمان را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۲-۵: معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار یک بعدی ، بدون منبع حرارتی ، در دیواره

معادله عمومی هدایت ناپایدار در یک سیستم یک بعدی بدون منبع حرارتی معادله (۱۱-۲) خواهد بود

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5-1)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، از روش جداسازی متغیر ها ، جواب عمومی را به صورت حاصلضرب دو تابع جداگانه از x, t فرض می کنیم پس

$$T = X(x)\theta(t) \quad (5-2)$$

از معادله (۲-۵) دوبار نسبت به x و یک بار نسبت به t مشتق می گیریم و در معادله (۱-۵) قرار می دهیم

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (5-3)$$

λ^2 مقداری است ثابت که ثابت جداسازی نامیده می شود .

حال با فرض $\lambda^2 > 0$ معادله (۳-۵) به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 = 0 \quad X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda^2 \alpha \theta = 0 \quad \theta = C_3 e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (5-5)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۵) و (۵-۵) در معادله (۲-۵) خواهیم داشت :

$$T = C_3 e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)$$

با توجه به اینکه C_1 و C_2 و C_3 ثابتهای معادله و مقدار عددی هستند بنابراین حاصلضرب دو عدد یک عدد خواهد بود لذا $C_3 * C_1 = C_1$ ، $C_3 * C_2 = C_2$ بنابراین معادله فوق به شرح زیر خواهد بود :

$$T = e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) \quad (5 - 6)$$

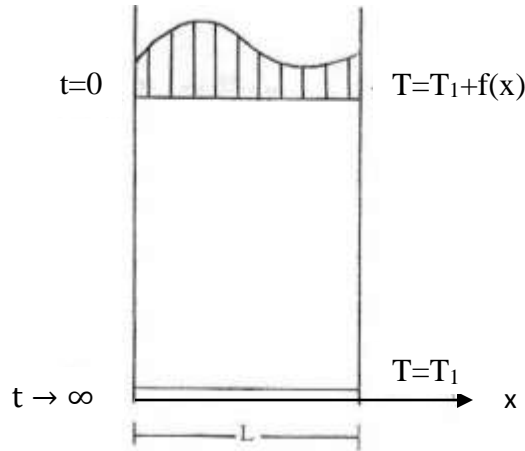
در معادله (۵-۶) C_1 و C_2 برحسب شرایط مرزی مسئله مشخص می شوند و λ^2 نیز مقدار ثابت که با توجه به شرایط و نوع مسئله تعیین می گردند حتماً مقدار λ^2 باید مثبت باشد زیرا اگر منفی باشد معادله (۵-۵) به صورت زیر خواهد شد .

$$\theta(t) = C e^{\lambda^2 \alpha t} \quad (5 - 7)$$

در زمانیکه $t \rightarrow \infty$ برود مقدار θ و در نتیجه T به سمت بی نهایت میل می کند که از نظر فیزیکی این مطلب قابل قبول نیست زیرا مفهوم آن این است که جسم هرگز به حالت تعادل نمیرسد و اگر λ^2 برابر صفر باشد معادله (۵-۵) به صورت $\theta = C$ در می آید که این معادله تابع زمان نیست در حالیکه موضوع اصلی بحث ناپایداری دما برحسب زمان است لذا این هم قابل قبول نیست پس حتماً باید λ^2 بزرگتر از صفر باشد .

۳-۵: حل تحلیلی معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار دو بعدی ، بدون چشمه حرارتی

دیواره ای به ضخامت L با ضریب نفوذ حرارتی α با توزیع دما پایدار $T = T_1 + f(x)$ ، ناگهان دو طرف دیواره به دمای T_1 تغییر و ثابت بماند . معادله توزیع دما و شدت انتقال حرارت از سطوح چنین دیواره ای به صورت زیر خواهد بود . شکل (۵-۱)



شکل (۵-۱) مدل هدایت ناپایدار در دیواره

حل : با توجه شکل (۵-۱) شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر خواهد بود :

B.C.1	$t > 0$	$x=0$	$T = T_1$
B.C.2	$t > 0$	$x=L$	$T = T_1$
I.C	$t = 0$		$T = T_1+f(x)$

با تغییر متغیر $\theta = T - T_1$ جواب عمومی معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد بود :

$$\theta = e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) \quad (5 - 8)$$

$T = T_1 \rightarrow \theta = 0$ با جایگذاری شرط مرزی 1

$$0 = e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 \cos \lambda(0) + c_2 \sin \lambda(0)) = e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 + 0) \rightarrow c_1 = 0$$

$$\theta = C e^{-\lambda^2 \alpha t} \sin \lambda x \quad (5 - 9)$$

$T = T_1 \rightarrow \theta = 0$ با جایگذاری شرط مرزی 2

$$0 = e^{-\lambda^2 \alpha t} (c_1 \cos \lambda L + c_2 \sin \lambda L) = c_2 e^{-\lambda^2 \alpha t} \sin \lambda L = c e^{-\lambda^2 \alpha t} \sin \lambda L$$

با توجه به اینکه مقدار C و $e^{-\lambda^2 \alpha t}$ صفر نیستند ناچاراً باید $\sin \lambda L = 0$ پس

$$\sin \lambda L = 0 \rightarrow \lambda L = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

با جایگذاری مقدار λ در معادله (۵-۹) خواهیم داشت :

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (5-10)$$

با جایگذاری شرط اولیه

$$t = 0 \rightarrow f(x) = \theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha(0)} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

لذا با توجه به اینکه $e^0 = 1$ پس

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (5-11)$$

از طرفی با توجه به قانون فوریه که هر تابعی از $f(x)$ را می توان بر حسب بسط سینوسی نوشت خواهیم داشت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x * \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (5-12)$$

با مقایسه معادله (۵-۱۱) و (۵-۱۲) مقدار C_n برابر خواهد بود

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (5-13)$$

حال با جایگذاری معادله (۵-۱۳) در معادله (۵-۱۰) و برگردان $(T - T_1)$ به جای θ معادله توزیع دما

بر حسب فاصله x و زمان t بدست می آید .

$$T = T_1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \sin \frac{n\pi}{L} x \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (5-14)$$

حال با داشتن تابع $f(x)$ مقدار T تعیین می گردد در حالت خاص اگر توزیع دمای پایدار آغازین برابر T_i و با گذشت زمان طرفین دیواره به دمای T_1 کاهش یافته و ثابت بماند معادله توزیع دما در دیواره بر حسب مکان و زمان و شدت انتقال حرارت از سطوح دیواره بر حسب زمان به صورت زیر خواهد بود.

$$t = 0 \quad T = T_i \quad \theta = \theta_i \rightarrow T_i - T_1$$

با توجه به معادله (۵-۱۴) و جایگذاری مقدار $f(x) = T_i - T_1$ و حل انتگرال مذکور خواهیم داشت :

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L (T_i - T_1) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= (T_i - T_1) \frac{-L}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{L}x \right] = (T_i - T_1) \frac{-L}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

با جایگذاری مقدار انتگرال در معادله (۵-۱۴) خواهیم داشت :

$$T = T_1 + \frac{2(T_i - T_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{1 - (-1)^n}{n} \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

لذا برای n های فرد معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد شد :

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_i - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \sin \frac{n\pi}{L} \quad (5 - 15)$$

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q = -KA \left[\frac{4}{\pi} (T_i - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x \right] \quad (5 - 16)$$

$$q = -4kA \frac{T_i - T_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (5 - 17)$$

لذا مجموع حرارت خروجی از سطح $x=0$ و $x=L$ در هر لحظه از t برابر است با

$$q = 8kA \frac{T_i - T_1}{L} \sum e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \quad (5 - 18)$$

لذا برای محاسبه مقدار حرارت خروجی از سطوح دیواره از لحظه شروع تبادل حرارتی تا لحظه t کافی است از رابطه (۵-۱۸) (ت تا $t=0$) انتگرال بگیریم .

$$\begin{aligned} Q &= 8kA \frac{T_i - T_1}{L} \int_0^t \sum e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} dt \\ &= 8kA \frac{T_i - T_1}{L} \left[-\sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right]_0^t \\ &= 8(T_i - T_1) \frac{kAL}{\alpha} \left[\sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \quad \text{از آنجائیکه}$$

$$\begin{aligned} \frac{kAL}{\alpha} (T_i - T_1) &= AL \rho c_p (T_i - T_1) \\ &= mc_p (T_i - T_1) \\ &= Q_i \end{aligned}$$

$$Q = 8Q_i \sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} (1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t}) \quad (5 - 19)$$

Q_i مقدار انرژی حرارتی درون جسم در لحظه اول یعنی قبل از شروع تبادل حرارتی است .

۴-۵: حل معادلات انتقال حرارت هدایتی ناپایدار ، بدون چشمه حرارتی

مسائل انتقال حرارت ناپایدار برای بعضی از اشکال هندسی چون صفحه ، استوانه و کره حل شده است و به صورت منحنی های کاربردی در دسترس است که معروفترین این منحنی ها نمودارهای هیسلمی باشند . هیسلمی برای اشکال هندسی یک بعدی دیواره ، استوانه و کره جهت محاسبه دمای مرکز ، دمای بخشی از مرکز و مقدار کل حرارت تلف شده را به صورت نمودار بیان کرده است .

۱-۴-۵: پارامترهای بدون بعد کاربردی در انتقال حرارت هدایتی ناپایدار

$$B_i = \frac{hL}{k} \quad \text{۱ - عدد بدون بعد بایو}$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{۲ - عدد بدون بعد فوریه}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \text{۳ - عدد بدون بعد دما}$$

$$\frac{Q}{Q_i} \quad \text{۴ - عدد بدون بعد حرارت تلف شده}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_o}{\theta_i} * \frac{\theta}{\theta_o} \quad \text{۵ - عدد بدون بعدی ایجاد می شود توسط اعداد بدون بعد موجود در نمودار هیسلمی}$$

$$\frac{x}{L} \quad \text{۶ - عدد بدون بعد طول}$$

نکته ۱: اگر بخواهیم به کمک نمودار هیسلمی (نمودار پاسخ دما) دمای مرکز اشکال را پیدا کنیم . کافی

است مقدار B_i^{-1} و F_o را از نمودار مربوطه تعیین و به هم متصل نمائیم محل برخورد این دو پارامتر با

محور عمودی نمودار مذکور مقدار $\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ را نشان می دهد . که در رابطه اخیر T_o مقدار دمای

مرکز اشکال مربوط می باشد . اشکال (۲-۳) و (۲-۴) و (۲-۵) ضمیمه ۲ کتاب

نکته ۲: اگر بخواهیم به کمک نمودار هیسلسر دمای نقاط دیگر اشکال را بر حسب فاصله از مرکز تعیین کنیم کافی است با توجه به شکل اگر دیوار بود نسبت $\frac{x}{L}$ و اگر استوانه یا کره بود نسبت $\frac{r}{R_0}$ و همچنین مقدار عددی Bi^{-1} را پیدا کرده و محل تلاقی این دو پارامتر با محور عمودی نمودار مربوطه ، مقدار $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$ را نشان می دهد که در رابطه اخیر T مقدار دمای نقاط خواسته شده اشکال (غیر از مرکز) مربوطه می باشد . اشکال (۲-۶) و (۲-۷) و (۲-۸) ضمیمه ۲ کتاب

نکته ۳: اگر بخواهیم به کمک نمودار هیسلسر مقدار کل حرارت تلف شده اشکال را محاسبه کنیم کافی است با توجه به شکل نسبت Bi و $F_0 Bi^{-1}$ را پیدا نموده و محل تلاقی این دو پارامتر با محور عمودی نمودار مربوط مقدار $\frac{Q}{Q_i}$ را نشان می دهد . که در رابطه اخیر مقدار $Q_i = mCp(T_i - T_\infty)$ که مقدار انرژی حرارتی درون اشکال در حالت آغازی و Q مقدار کل حرارت تلف شده اشکال می باشد . اشکال (۲-۹) و (۲-۱۰) و (۲-۱۱) ضمیمه ۲ کتاب

۵-۵: حل معادلات انتقال حرارت هدایتی ناپایدار چند بعدی ، با استفاده از نمودارهای هیسلسر

جهت استفاده از نمودارهای هیسلسر برای سیستمهای چند بعدی کافی است از اصل انطباق که از ضرب جوابهای سیستم های یک بعدی در یکدیگر می باشد استفاده کرد.

بعنوان نمونه یک مکعب مستطیل با ضخامت های $2a$ ، $2b$ و $2c$ در نظر بگیرید از آنجا که هر نقطه مکعب در حقیقت روی هر سه دیواره قرار دارد . پس دمای بدون بعد آن نقطه را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{مکعب مستطیل}} = \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2a} * \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2b} * \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2c}$$

برای آشنایی بیشتر با روش تفکیک سیستمهای چند بعدی ناپایدار ، به سیستمهای یک بعدی به نمودار(۲-۱۲) ضمیمه ۲ کتاب مراجعه شود .

۶-۵: سیستم ظرفیت حرارتی فشرده

تاکنون مسائل هدایت حرارتی ناپایداری را مورد بررسی قرار دادیم که در تمامی اشکال هندسی، دمای هر نقطه از سیستم برحسب زمان و مکان متغیر بود. لیکن در مورد اجسام کوچک می توان با یک فرض منطقی تغییرات دما را برای کلیه نقاط درون جسم ناچیز فرض نمود و در هر لحظه دما در سراسر جسم را یکسان در نظر گرفت در این صورت، مفهوم آنست که مقاومت جابجایی جسم و محیط بسیار بزرگتر از مقاومت هدایتی داخلی جسم است و نیز گرادیان دما در لایه مرزی حرارتی خیلی بزرگتر از گرادیان دما در داخل جسم است لذا شرط استفاده از سیستم ظرفیت حرارتی فشرده و قابل اعتماد بودن پاسخ حاصله برقراری معیار زیر است

B_i : عدد بدون بعد بایو که عبارت است از نسبت مقاومت هدایتی حرارتی در داخل جسم به مقاومت جابجایی حرارتی در جسم کوچکتر از 0.1 باشد.

$$B_i = \frac{hL_c}{k} < 0.1 \quad (5 - 20)$$

$$L_c = \frac{V}{A}$$

h : ضریب انتقال حرارت جابجایی

L_c : طول مشخصه جسم

V : حجم جسم

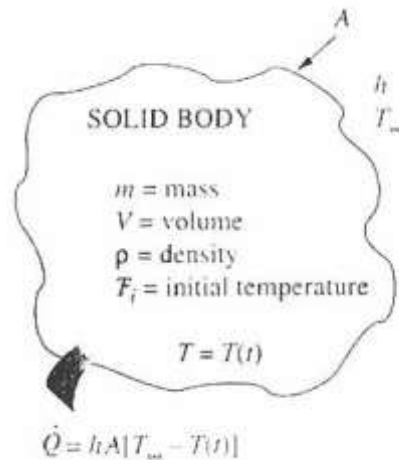
A : سطح جسم

بنابراین هرگاه مقدار عدد B_i برابر صفر شود، سیستم ظرفیت حرارتی فشرده جواب کاملاً دقیق به ما میدهد

۷-۵: حل معادله توزیع دما در سیستم ظرفیت حرارتی فشرده

هرگاه جسم کوچکی به جرم m و دانسیته ρ و گرمای ویژه C_p و سطح A که در آغاز در دمای ثابت T_i

است ناگهان در مجاورت سیالی با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی h قرار گیرد و با فرض اینکه در هر لحظه از زمان دمای جسم در سراسر جسم یکسان باشد. معادله توزیع دما در داخل جسم برحسب زمان و شدت انتقال حرارت مبادله شده بین جسم و سیال در هر لحظه و مقدار حرارت مبادله شده از زمان شروع ناپایداری تا هر لحظه به شرح ذیل خواهد بود. شکل (۵-۲)



شکل (۵-۲) مدل هدایت ناپایدار در سیستم با ظرفیت حرارتی فشرده

اگر در سیستمی مفهوم ظرفیت گرمایی صادق باشد. در آن صورت به مرور زمان گرما از طریق جابجایی به محیط منتقل می شود. و دمای جسم جامد با زمان کاهش می یابد. کاهش تدریجی دمای جسم، به مفهوم کاهش انرژی داخلی جسم جامد می باشد. لذا

میزان افزایش انرژی در زمان dt برابر میزان انتقال حرارت به داخل جسم در زمان dt

$$hA(T - T_\infty) = -mc_p \frac{dT}{dt} \quad (5-21)$$

علامت منفی نشانه کاهش انرژی داخلی جسم است

$$\frac{-hA}{mc_p} \int_0^t dt = \int_0^T \frac{dT}{T - T_\infty} \quad (5 - 22)$$

$$\frac{-hA}{mc_p} t = \ln \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{mc_p} t} \quad (5 - 23)$$

لذا معادله توزیع دما بر حسب زمان به صورت زیر خواهد بود : شکل (۵-۳)

$$T = T_\infty + (T_i - T_\infty)e^{-\frac{hA}{mc_p} t} \quad (5 - 24)$$

معادله (۵-۲۴) گویای این موضوع است که در شرایط یکسان هرچه مقدار h بیشتر باشد و یا گرمای ویژه

C_p جسم کوچکتر باشد ، جسم زودتر به دمای تعادل می رسد بنابراین شدت انتقال حرارت از جسم

در هر زمان برابر شدت تغییرات انرژی داخلی است لذا

$$q = -mc_p \frac{dT}{dt} \quad (5 - 25)$$

کافی است از معادله (۵-۲۴) را $\frac{dT}{dt}$ محاسبه و در معادله (۵-۲۵) قرار دهید .

$$q = -mc_p \left[(T_i - T_\infty) \left(-\frac{hA}{mc_p} \right) e^{-\frac{hA}{mc_p} t} \right]$$

$$q = hA(T_i - T_\infty)e^{-\frac{hA}{mc_p} t} \quad (5 - 26)$$

مقدار کل حرارت منتقل شده از جسم از شروع ناپایدار تا زمان t کافی است از معادله (۵-۲۶) در بازه

(t تا $t=0$) انتگرال بگیریم .

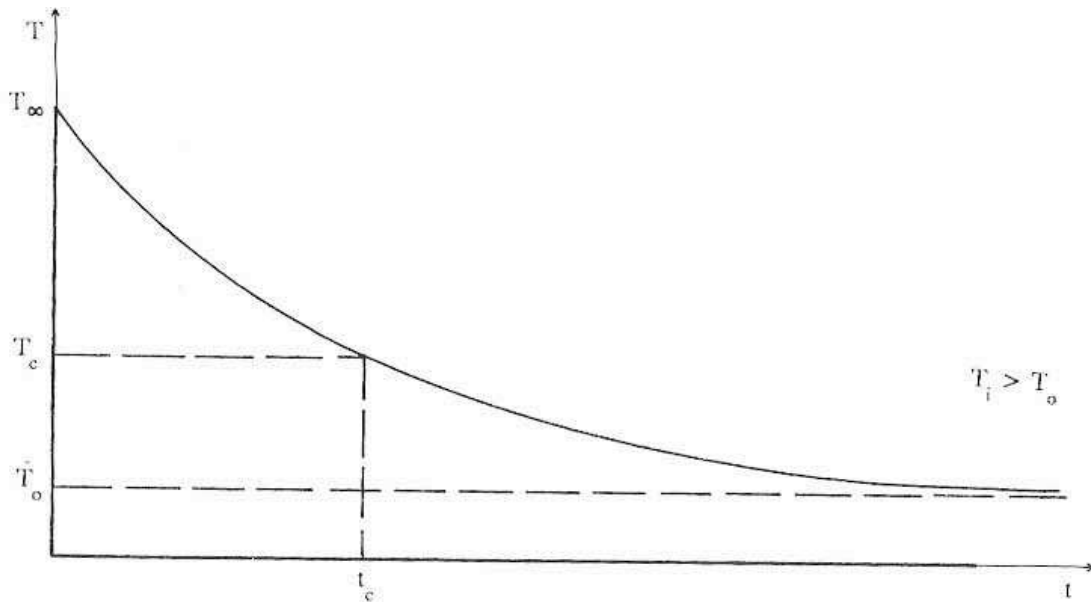
$$Q = \int_0^t q_t dt = \int_0^t hA(T_i - T_\infty)e^{-\frac{hA}{mc_p} t} dt$$

$$hA(T_i - T_\infty) \left(\frac{mc_p}{hA} \right) [1 - e^{-\frac{hA}{mc_p} t}]_0^t$$

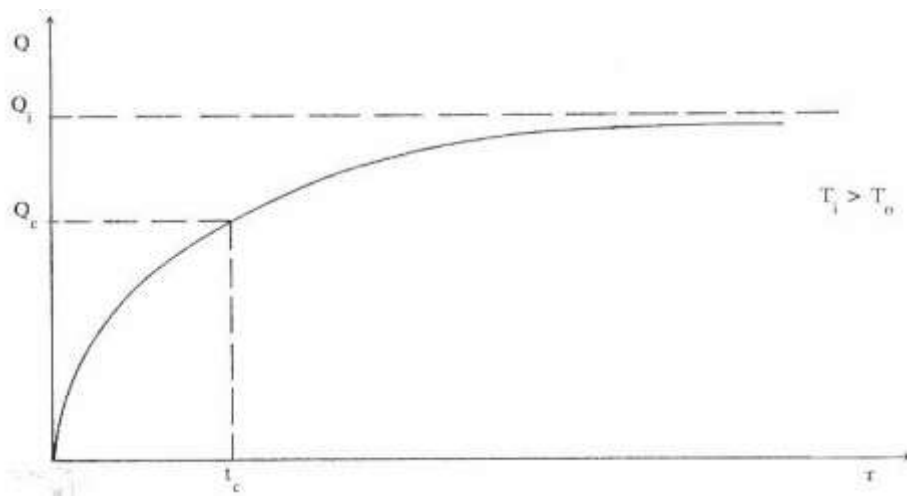
$$Q = mcp(T_i - T_\infty) \left(1 - e^{-\frac{hA}{mcp}t} \right) \quad (5 - 27)$$

معادله انتقال حرارت کل از شروع ناپایداری تا هر لحظه از زمان شکل (۵-۴)

$$Q = Q_i \left(1 - e^{-\frac{hA}{mcp}t} \right) \quad (5 - 28)$$



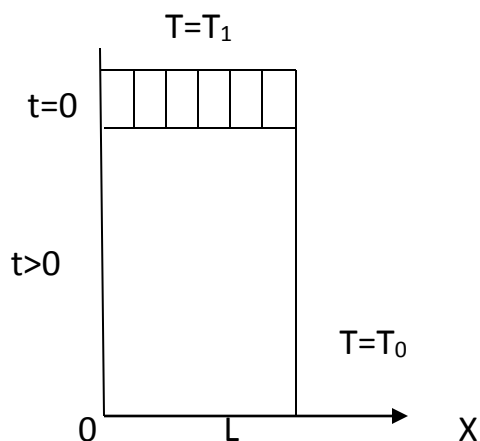
شکل (۵-۳) مدل تغییرات دما بر حسب زمان برای یک جسم فشرده



شکل (۵-۴) مدل حرارت تلف شده بر حسب زمان برای دیواره نازک

۸-۵: سیستم ظرفیت حرارتی فشرده بدون اثر جابجایی

بدین منظور یک دیواره نازک به ضخامت $2L$ و ضریب هدایت حرارتی ثابت K در دمای اولیه T_i را در نظر بگیرید که ناگهان دمای سطوح آن به دمای T_0 تغییر یافته و ثابت باقی بماند، معادله تغییرات دمای جسم بر حسب زمان و همچنین میزان انتقال حرارت جسم به صورت زیر خواهد بود. شکل (۵-۵)



شکل (۵-۵) مدل هدایت حرارتی ناپایدار در یک دیواره نازک

با توجه به تقارن دیواره، محور مختصات را در وسط دیواره انتخاب می‌کنیم و از آنجائیکه در هر لحظه، حرارت هدایت شده از هر سطح دیواره برابر تغییر انرژی داخلی همان سطح است لذا داریم:

$$-mc_p \frac{\partial T}{\partial t} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-29)$$

$$-AL\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -KA \frac{T - T_0}{L} \quad (5-30)$$

با تغییر متغیر $\theta = T - T_{\infty}$ و با جانشینی $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$ و جایگذاری آن در معادله (30 - 5) خواهیم داشت :

$$\int \frac{\partial \theta}{\theta} = \int -\frac{\alpha}{L^2} dt$$

و با توجه به شکل (5 - 5) با جایگذاری شرط اولیه

$$\theta = ce^{-\frac{\alpha}{L^2}t}$$

$$t = 0 \quad T = T_i \quad \theta_i = T_i - T_o \longrightarrow C = T_i - T_o$$

$$\frac{T - T_o}{T_i - T_o} = e^{-\frac{\alpha}{L^2}t}$$

بنابراین معادله توزیع دما بر حسب زمان به صورت زیر خواهد بود :

$$T = T_o + (T_i - T_o)e^{-\frac{\alpha}{L^2}t} \quad (5 - 31)$$

با توجه به اینکه شدت انتقال حرارت جسم برابر شدت تغییرات انرژی داخل جسم است خواهیم داشت :

$$q = -mc_p \frac{dT}{dt} = -mCp \left[(T_i - T_o) \left(-\frac{\alpha}{L^2} \right) e^{-\frac{\alpha}{L^2}t} \right]$$

بنابراین معادله شدت انتقال حرارت جسم به صورت زیر خواهد شد :

$$q = KA \frac{T_i - T_o}{L} e^{-\frac{\alpha}{L^2}t} \quad (5 - 32)$$

برای محاسبه مقدار کل حرارتی که از شروع ناپایداری یعنی از زمان (t تا t = 0) که جسم خارج یا وارد

می شود کافی است از معادله (5-32) نسبت به t انتگرال بگیریم .

$$Q = \int_0^t q dt$$

$$Q = \frac{KA}{L} (T_i - T_o) \left(-\frac{L^2}{\alpha}\right) \left[e^{-\frac{\alpha}{L^2}t}\right]_0^t$$

$$Q = Q_i (1 - e^{-\frac{\alpha}{L^2}t})$$

$$Q_i = mc_p (T_i - T_o) \quad (5 - 33)$$

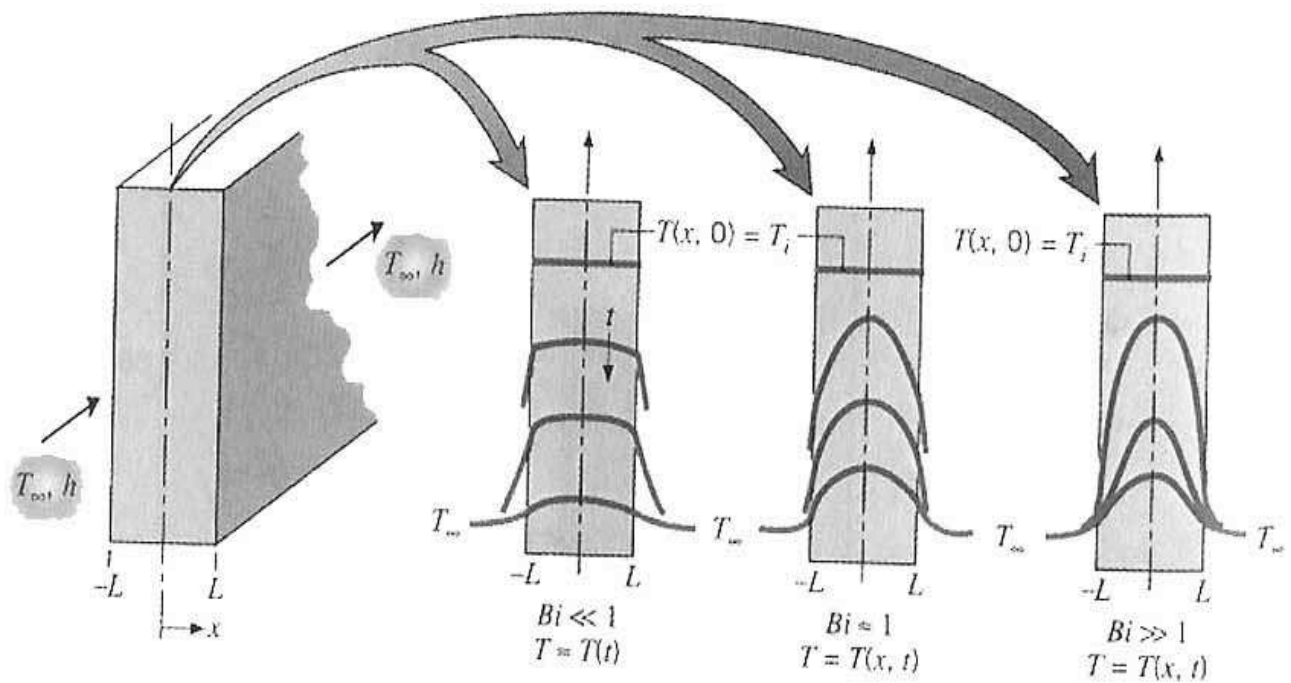
۹-۵: اهمیت عدد بدون بعد بایو

عدد بایو نقش اساسی در مسائل هدایت غیر دائم دارد و شکل (۵-۶) و (۵-۷) بطوریکه این دیواره در دمای یکنواخت T_i قرار داشته باشد و سپس با فرو بردن در سیالی به دمای T_∞ به شرطی که $T_i > T_\infty$ تحت سرمایش جابجائی قرار می گیرد این مسئله در جهت X یک بعدی بوده و دما با زمان و مکان تغییر می کند $T(x,t)$ این تغییرات به شدت به عدد بایو بستگی دارد .

۱- اگر عدد بایو $B_i \ll 1$ باشد گرادیان دما در جسم کوچک است لذا $T(x,t) \simeq T(t)$ یعنی تمام اختلاف دما بین جسم و سیال وجود دارد و دمای جسم در حالیکه به سمت T_∞ میل می کند همواره یکنواخت است

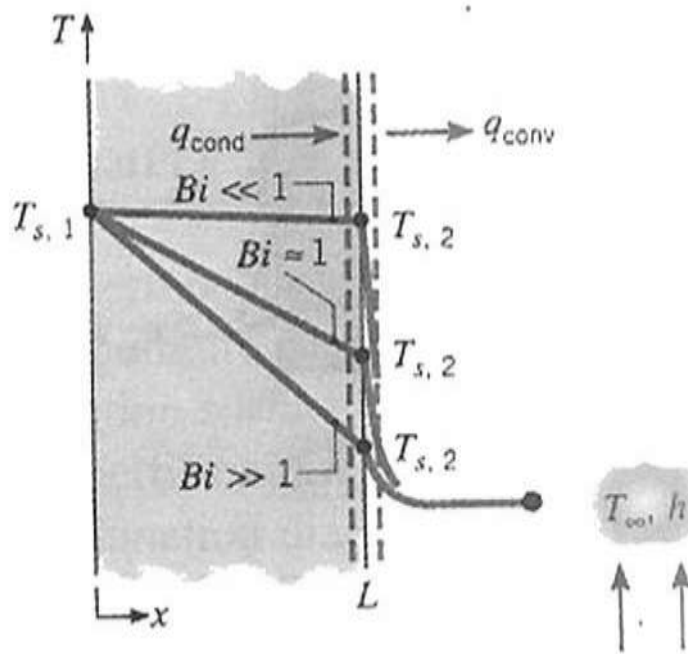
۲- اگر عدد $B_i \approx 1$ باشد . گرادیان دما در جسم قابل ملاحظه خواهد بود یعنی $T = T(x,t)$

۳- اگر عدد بایو $B_i \gg 1$ باشد اختلاف دما در جسم هنوز خیلی زیادتر از اختلاف دمای سطح و سیال است .



شکل (۵-۶) مدل توزیع دمای ناپایدار برای اعداد مختلف بایو در یک دیواره مسطح

با جابجائی سطحی



شکل (۵-۷) مدل اثر عدد بایو روی توزیع دمای دائم در یک دیواره مسطح با جابجائی سطحی

۱۰-۵: خلاصه

مسائل هدایت ناپایدار در اغلب کاربردهای مهندسی وجود دارند هنگام مواجه شدن با یک مسئله ناپایدار برای رعایت سادگی کار، اولین قدم محاسبه عدد بایو است اگر این عدد کوچکتر از 0.1 باشد می توانیم از ظرفیت حرارتی فشرده با حداقل محاسبات نتیجه دقیقی را بدست آوریم ولی اگر عدد بایو بزرگتر 0.1 بود باید اثرات مکانی را نیز مد نظر قراردهیم که در این صورت از نمودارهای هسیلر (نمودار پاسخ دما) استفاده می نمایم در غیر اینصورت باید از روش تحلیلی که همان حل معادلات دیفرانسیل است معادله توزیع دما و شدت انتقال حرارت را بدست آوریم .

- ۱- هرگاه ضریب حرارت حرارتی جسم بینهایت باشد، توزیع دما در داخل جسم یکنواخت است .
- ۲- هر گاه شیب دما برحسب فاصله در دو سمت فصل مشترک جسم جامد و سیال برابر باشد در این صورت مقدار عدد بایو برابر یک است یعنی مقاومت حرارتی هدایتی و مقاومت حرارتی جابجایی برابر هستند
- ۳- نسبت حاصلضرب دانستیه در حجم و گرمای ویژه جسم به حاصلضرب مقاومت حرارتی جابجایی در سطح جسم جامد را ثابت زمانی گویند و با τ نشان می دهند .

$$\tau_c = \frac{\rho v c p}{hA} = \frac{m_{cp}}{hA} \cdot \frac{m_{cp}}{hA}$$

- ۴- هر چه مقدار عددی τ_c کوچکتر باشد مدت زمان لازم برای رسیدن دمای جسم به دمای محیط کمتر است
- ۵- مدت زمانی که نیاز است تا حرارت در داخل جسم فاصله L را به صورت انتقال حرارت هدایتی طی کند برابر L^2/α خواهد بود.

- ۶- عدد فوریه یک عدد بدون بعد است و برابر است نسبت حاصلضرب ضریب نفوذ حرارتی در زمان به توان دوم ضخامت جسم

- ۷- هر گاه ضخامت جسم $L \rightarrow \infty$ و در لحظه اولیه $t=0$ عدد فوریه برابر صفر است

- ۸- هر گاه مقدار $\frac{1}{Bi}$ برابر صفر باشد مفهوم آن اینست که مقدار h به سمت بینهایت می رود .

فصل نهم

مقدمه ای بر انتقال حرارت جابجایی

۱-۶: مقدمه

تاکنون انتقال حرارت هدایتی را بررسی کردیم و انتقال حرارت جابجایی را فقط در مواقعی که شرایط مرزی را ارضا می کرد مورد استفاده قرار دادیم لذا در بررسی مسائل جابجایی دو هدف اصلی را دنبال میکنیم

۱- فهم مکانیزم فیزیکی انتقال حرارت جابجایی

۲- روش های محاسباتی مکانیزم انتقال حرارت جابجایی

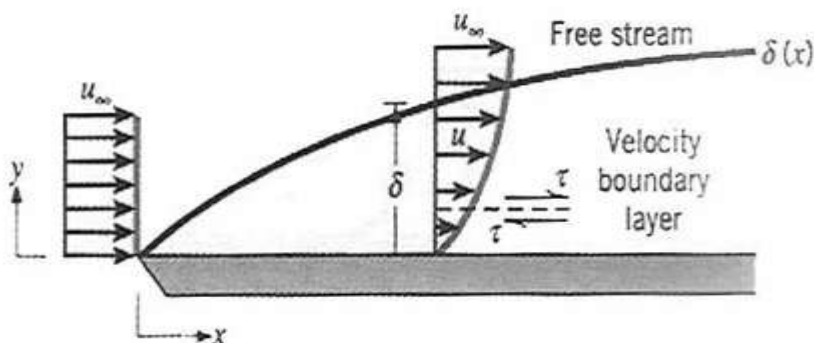
۲-۶: ضریب انتقال حرارت جابجایی

برای درک بهتر شرایط موجود شکل (۶-۱) را مد نظر قرار می دهیم. سیالی که با سرعت u_∞ و دمای T_∞ روی سطحی به مساحت A جریان دارد به شرطی که دمای سطح T_w و $T_w \neq T_\infty$ باشد بین سطح و سیال مبادله حرارت صورت می گیرد و این مبادله حرارت به صورت جابجایی خواهد بود و شدت جریان حرارت را می توان طبق قانون سرمایش نیوتن به صورت زیر نشان داد

$$\frac{q}{A} = h(T_w - T_\infty) \quad (6-1)$$

که در معادله (۶-۱) h ضریب جابجایی موضعی می باشد از طرفی با تغییر شرایط جریان از نقطه ای به نقطه دیگر در روی سطح مقدار q و h نیز متعاقب آن تغییر می کند که مقدار آن برابر انتگرال شدت جریان روی سطح می باشد.

$$q = \int_A q dA \quad (6-2)$$



شکل (۶-۱) جریان یکنواخت پایدار روی صفحه تخت

و با توجه به اینکه سرعت در مجاورت صفحه صفر است انتقال حرارت از دیواره به سیال از طریق هدایت انجام می گیرد و طبق قانون فوریه شدت انتقال حرارت به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-3)$$

با مقایسه رابطه (۶-۱) و (۶-۳) خواهیم داشت

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}}{T_w - T_\infty} \Big|_{y=0} \quad (6-4)$$

رابطه (۶-۴) بیانگر این است که h ضریب انتقال حرارت جابجایی تابع گرادیان دماست $\frac{\partial T}{\partial y}$ لذا برای پیدا کردن شیب دما در سطح جسم نیازمند داشتن معادله توزیع دما در داخل لایه مرزی حرارتی می باشیم و سپس با مشتق گیری از معادله توزیع دما در جایی که $y=0$ است گرادیان دما محاسبه می شود و گرادیان دما $\frac{\partial T}{\partial y}$ را در معادله (۶-۴) قرار داده ضریب انتقال حرارت جابجایی محاسبه می شود و سپس با کمک قانون سرمایش نیوتن مقدار h ، ضریب انتقال حرارت جابجایی، شدت انتقال حرارت جابجایی بدست می آید.

۳-۶: اعداد بدون بعد کاربردی در انتقال حرارت جابجایی

اعداد بدون بعد ما را در فهم پدیده های جریان سیال کمک می کنند و مهمترین اعداد بدون بعد، که در انتقال حرارت کاربرد دارند عبارتند از:

۱- **عدد رینولدز Re**: عبارت است از نسبت نیروی لختی به نیروی گرانو و نقش عدد رینولدز در

جریان جابجایی اجباری است

$$Re = \frac{\rho \cdot U_\infty L}{\mu} = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (6-5)$$

۲- **عدد پرانتل Pr**: بیانگر نسبت نفوذ ملکولی اندازه حرکت به نفوذ ملکولی حرارت و رل مهمی در انتقال حرارت جابجایی ایفا می کند و کنترل کننده خوبی میان توزیع دما و سرعت می باشد .

$$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{\frac{k}{\rho C_p}} = \frac{C_p \mu}{k} \quad (6-6)$$

۳- **عدد ناسلت Nu**: بیانگر نسبت انتقال حرارت جابجایی به انتقال حرارت هدایتی است

$$Nu = \frac{h\Delta T}{\frac{k\Delta T}{L}} = \frac{hL}{k} \quad (6-7)$$

۴- **عدد استانتون St**: بیانگر نسبت شار حرارتی جابجایی به ظرفیت حرارتی

$$St = \frac{h\Delta T}{\rho C_p u \Delta T} = \frac{h}{\rho C_p u} = \frac{Nu}{RePr} \quad (6-8)$$

۴-۶: لایه مرزی سرعت

برای آشنایی با لایه مرزی جریان روی صفحه تحت شکل (۶-۱) را در نظر بگیرید سرعت سیالی که با سطح، در تماس اند صفر است این ذرات حرکت ذرات در لایه بالاتر را کند می کند و این عمل تا $y=\delta_v$ ادامه و اثر آن ایجاد تنش برشی τ روی صفحات موازی سرعت سیال است حال با افزایش y فاصله از سطح مولفه x سرعت سیال U تا مقدار U_∞ در جریان آزاد افزایش می یابد لذا δ_v فاصله از سطح دیواره تا جایی که لایه های ذرات سیال تحت اثر تنش برشی نیست را ضخامت لایه مرزی سرعت گویند و مقدار y (فاصله از سطح) در $U=0.99U_\infty$ می باشد بنابراین جریان سیال توسط دو ناحیه از هم متمایز می باشند

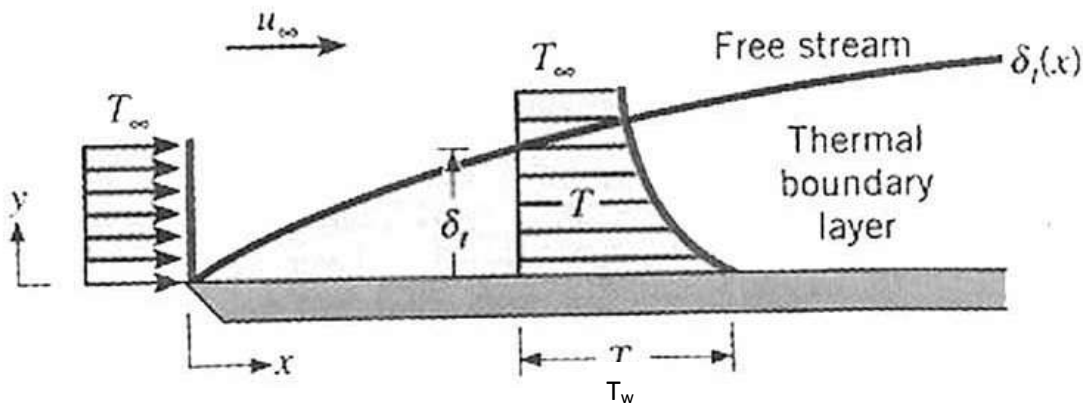
ناحیه اول: ناحیه ای است که در آن یک لایه نازک سیال (لایه مرزی) وجود دارد و گرادیان سرعت و تنش های برشی بزرگ هستند .

ناحیه دوم: ناحیه ای که خارج از لایه مرزی است که گرادیان سرعت و تنش های برشی قابل صرف نظر کردن هستند و با افزایش فاصله از لبه ابتدای اثرات لزجت هرچه بیشتر به داخل جریان آزاد نفوذ کرد و لایه مرزی رشد می کند یعنی افزایش ضخامت لایه مرزی با افزایش طول x

۵-۶: لایه مرزی حرارت

لایه مرزی حرارتی همانند لایه مرزی سرعت هنگامی بوجود می آید که دماهای سطح و جریان سیال آزاد متفاوت باشند شکل (۲-۶) اگر دمای صفحه تخت ثابت باشد در لبه ابتدای ، پروفیل دما یکنواخت یعنی $T(y)=T_{\infty}$ است ولی ذرات سیالی که در تماس با صفحه قراردارند در تعادل حرارتی به دمای صفحه می رسند و با مبادله حرارت بین ذرات سیال و لایه مجاور گرادیان دما در سیال بوجود می آید . ناحیه ای که این گرادیان دما وجود دارد لایه مرزی حرارتی نامیده می شود و به صورت δ_t نشان داده می شود و مقدار آن در y برابر خواهد بود با :

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_{\infty}} = 0.99$$



شکل (۲-۶) لایه مرزی حرارتی روی صفحه تخت

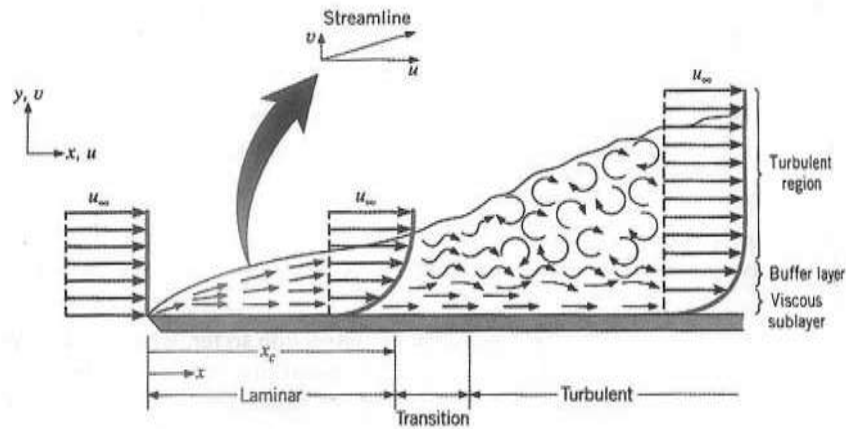
۶-۶: اهمیت لایه های مرزی

مشخصه لایه مرزی سرعت که ضخامت آن δ_v است وجود گرادیان سرعت و تنش برشی می باشد در حالیکه مشخصه لایه مرزی حرارت که ضخامت آن δ_t است وجود گرادیان دما و انتقال حرارت می باشد لذا پارامترهای مهم در انتقال حرارت جابجایی ، ضریب اصطکاک ، لایه مرزی سرعت و لایه مرزی حرارت و ضریب انتقال حرارت جابجایی می باشد .

۷-۶: جریان آرام و مغشوش

اولین گام در مباحث انتقال حرارت جابجایی تعیین نوع جریان است یعنی آرام یا مغشوش بودن سیال ، در لایه مرزی است شکل (۳-۶) در لایه مرزی آرام حرکت سیال کاملاً منظم است و می

توان خطوط جریان را که ذرات سیال در امتداد آنها حرکت می کنند را مشخص نموده و در لایه مرزی مغشوش حرکت سیال کاملاً نامنظم است و توسط نوسانات سرعت مشخص می شود که این نوسانات ، انتقال ممنتوم ، انرژی ، اصطلاک سطحی و نرخ انتقال حرارت جابجایی را تحت تاثیر قرار می دهند .



شکل (۳-۶) رشد لایه مرزی سرعت روی صفحه تخت

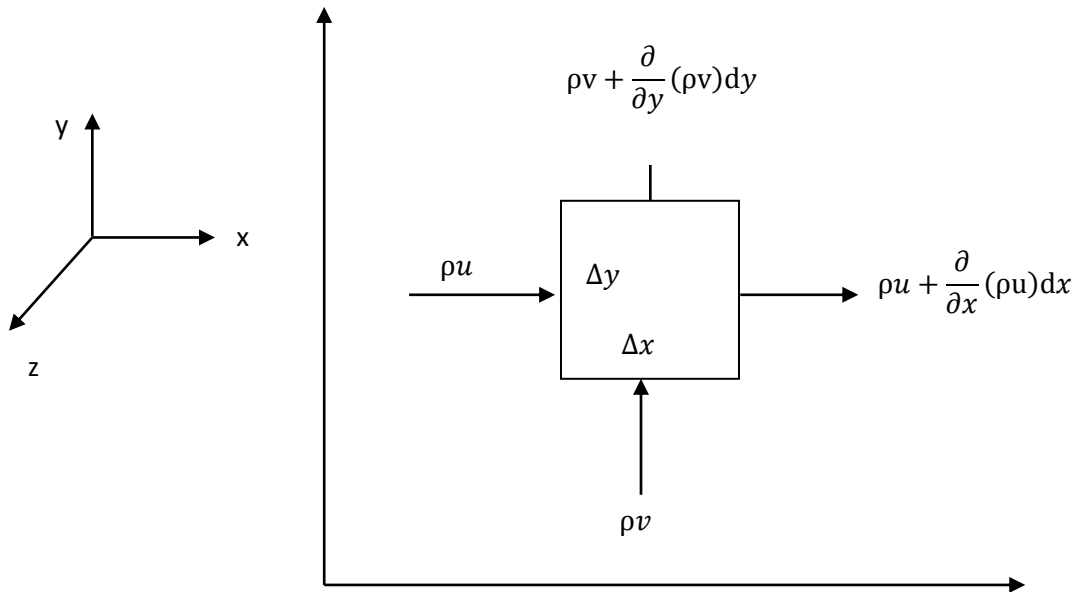
۸-۶: معادلات حاکم در لایه مرزی

برای سادگی در محاسبات فرضیات زیر را در نظر می گیریم.

۱. جریان آرام و دائمی است .
۲. سیال تراکم ناپذیر است .
۳. خواص فیزیکی طی فرآیند ثابت اند .
۴. در جهت جریان فقط انتقال حرارت ، جابجایی است .
۵. از انتقال حرارت هدایتی و تشعشعی صرف نظر می کنیم .
۶. عمق حجم کنترل در جهت Z برابر واحد است .

۸-۱-۶: معادله پیوستگی

برای تعیین معادله پیوستگی یک حجم کنترل ($\delta x \cdot \delta y \cdot 1$) را در داخل لایه مرزی سرعتی انتخاب میکنیم و اصل بقای جرم در داخل این حجم کنترل را مورد بررسی قرار می دهیم . شکل (۴-۶)



شکل (۴-۶) المان حجم کنترل برای بقای جرم در لایه مرزی سرعتی

$$(\rho u)dy + (\rho v)dx - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right] dy - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] dx = 0 \quad (6 - 9)$$

با حذف عبارات مشابه و تقسیم کردن باقیمانده معادله بر $dx \cdot dy$ خواهیم داشت .

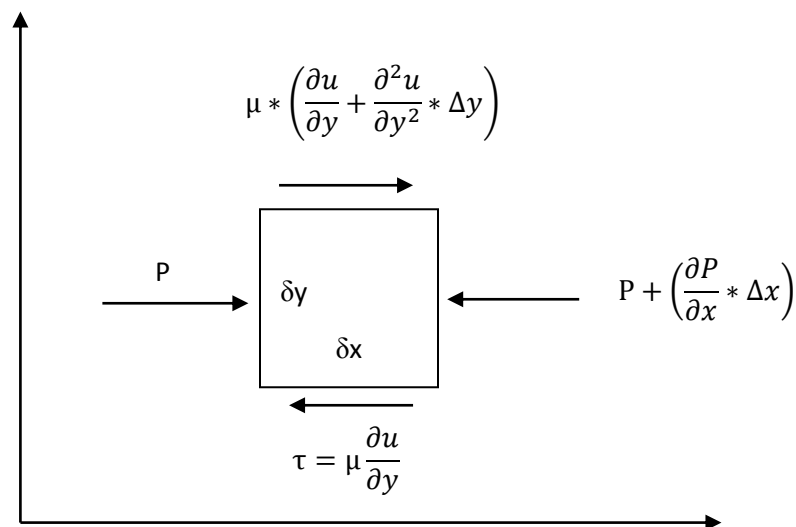
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (6 - 10)$$

با توجه به غیر قابل تراکم بودن سیال ، معادله (۱۰-۶) به صورت زیر خواهد بود . که این معادله پیوستگی نام دارد .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(6 - 11)

۶-۸-۲ معادله اندازه حرکت : قانون دوم حرکت نیوتن برای حجم کنترل دیفرانسیلی در یک لایه مرزی سرعت چنین بیان می گردد ، مجموع نیروهایی که روی سطح کنترل عمل می کند باید با نرخ خالص ممتوم خروجی از حجم کنترل (جریان خروجی - جریان ورودی) برابر باشد . شکل (۶-۵)



شکل (۶-۵) المان حجم کنترل برای تعادل نیروها در لایه مرزی سرعتی

لذا نیروهای وارده بر حجم کنترل دیفرانسیلی شامل مجموع نیروهای سطحی و نیروهای حجمی است که این نیروها به صورت زیر تعریف می شوند .

۶-۸-۲-۱ نیروی حجمی :

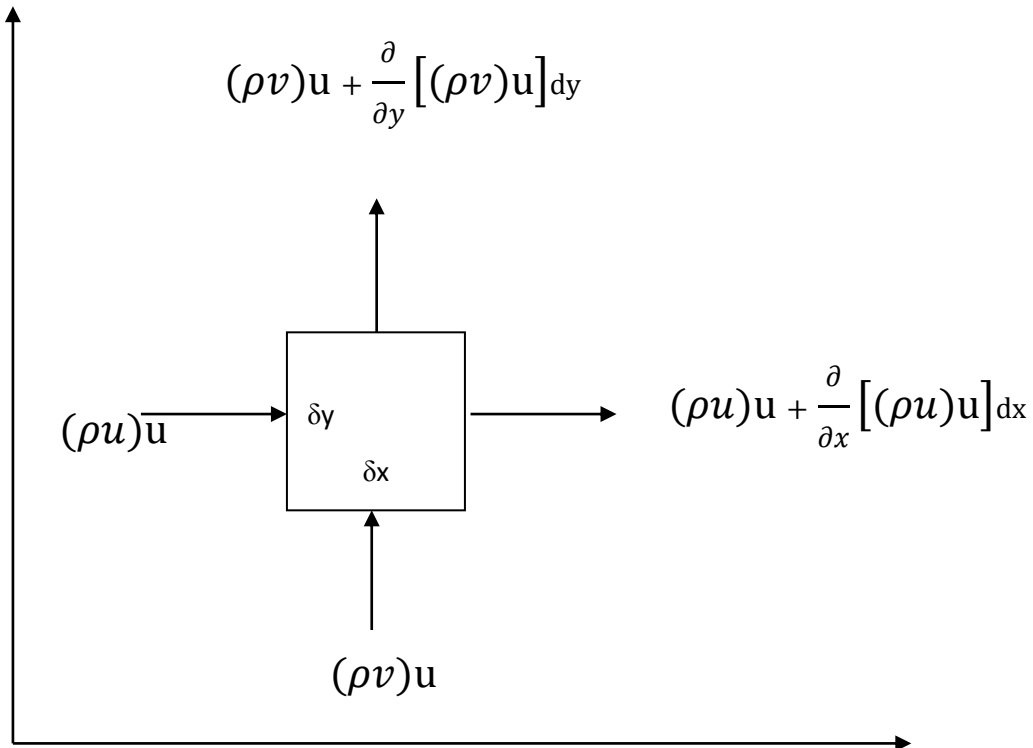
این نیروها بر کل جرم موجود در حجم کنترل اثر می کنند و ناشی از میدانهای خارجی مانند : جاذبه ، میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی هستند که در اینجا تنها نیروی حجمی که در محاسبات در نظر میگیریم نیروی حاصل از میدان جاذبه یعنی وزن است .

۶-۸-۲-۲ نیروی سطحی :

این نیروها ناشی از عوامل زیر هستند :

- * نیروهای حاصل از برش اجسام صلب توسط کنترل گذرنده از بین آنها
- * نیروهای حاصل از فشار هیدرواستاتیکی و تنشهای ناشی از لزجت که در اثر حرکت سیال با گرادیان سرعت حاصل می شود.

و در سیال ساکن هیچ گونه تنش برشی وجود ندارد . بنابراین تنها نیروی سطحی نیروی فشاری است لذا برای استفاده از قانون نیوتن ، شدت جریانهای ممتنوم سیال مربوط به حجم کنترل نیز باید تعیین شود. لذا شدت جریان جرم در سطح X (در صفحه y-Z) برابر ρu و شدت جریان ممتنوم در جهت X برابر $(\rho u)u$ خواهد بود . به همین ترتیب شدت جریان ممتنوم در جهت X ناشی از جریان جرم در سطح (در صفحه X=Z) برابر $(\rho v)u$ خواهد بود . شکل (۶-۶)



شکل (۶-۶) المان حجم کنترل برای شدت جریان ممتنوم در لایه مرزی سرعتی

نرخ خالص ممتنوم خروجی از حجم کنترل در جهت X برابر است :

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\rho u)u] dx \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} [(\rho v)u] dx \cdot dy \quad (6 - 12)$$

نیروی وارده بر سطح حجم کنترل عبارتند از تنش برشی در جهت سطح و نیروهای فشاری عمود بر سطح

$$x \text{ جهت } = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot 1 \quad (6 - 13)$$

$$x \text{ جهت } = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx \cdot dy$$

با مساوی قراردادن نرخ تغییر ممتنوم سیال در جهت x معادله (۶-۱۲) با مجموع نیروهای وارده در جهت x معادله (۶-۱۳) و تقسیم طرفین بر $dx \cdot dy$ و با توجه به غیر قابل تراکم بودن سیال خواهیم داشت .

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

مقدار $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ زیرا فشار در جهت عمود بر سطح تغییر نمی کند لذا فشار در لایه مرزی فقط به x بستگی دارد . و با فشار جریان آزاد در خارج از لایه مرزی برابر است لذا معادله اندازه حرکت در جهت x به صورت زیر خواهد بود :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6 - 14)$$

همچنین برای تعیین معادله اندازه حرکت در جهت y نیز می توان به روش فوق عمل نمود و نهایتاً معادله اندازه حرکت در جهت y به صورت زیر خواهد بود :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (6 - 15)$$

۱۰-۶ معادله انرژی :

برای تعیین معادله انرژی یک حجم کنترل $\delta x. \delta y. 1$ را در داخل لایه مرزی حرارتی در نظر میگیریم و موازنه انرژی برای این حجم کنترلی را برای واحد زمان می نویسیم . شکل (۶-۶)

خالص انرژی و جابجایی در جهت x + خالص انرژی و جابجایی در جهت y + خالص انرژی هدایتی در جهت x برابر کار خالص نیروهای ویسکوزیته .

حال سرعت در جهت y را V و سرعت در جهت x را با U و عرض سیال در جهت Z را واحد در نظر میگیریم .

شکل (۶-۶) المان حجم کنترل برای تحلیل انرژی در لایه مرزی حرارتی

نرخ جرم ورودی برابر $m^\circ = \rho u dy. 1$

انرژی جابجایی ورودی از سمت چپ $\rho u c_p T dy$

انرژی جابجایی ورودی از سمت پایین $\rho v c_p T dx$

با توجه به فرض آرام بودن جریان در جهت عمود بر صفحه ، انتقال حرارت از طریق هدایتی خواهد بود . که مطابق قانون فوریه مقدار آن برابر $1 \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \cdot K$ خواهد بود .

از طرفی کار نیروی ویسکوزیته برابر است با حاصلضرب نیروی برشی در فاصله ای که این نیرو اثر میکند یعنی:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

که $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ بعنوان نیروی برشی که به ازای واحد سطح و $1 \cdot dx$ به عنوان سطح و $\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$ بعنوان فاصله ای که نیروی برشی در واحد زمان اثر می کند)

از طرفی انرژی خروجی برابر است با انرژی ورودی + دیفرانسیل تغییرات انرژی ورودی

انرژی جابجایی خروجی از سمت راست برابر است با :

$$\rho c_p u T dy + d(\rho c_p u T dy) = \rho c_p dy \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \quad (6 - 16)$$

و حرارت جابجایی خروجی از سمت بالا برابر است با :

$$\rho v c_p T dx + d(\rho c_p v T dx) = \rho c_p dx \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) \quad (6 - 17)$$

و حرارت هدایتی خروجی از سمت بالا برابر است با :

$$-K \frac{\partial T}{\partial y} dx + d \left(-K \frac{\partial T}{\partial y} dx \right) = -K dx \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (6 - 18)$$

با جایگذاری این مقادیر در موازنه انرژی و با صرف نظر کردن از جملات دیفرانسیلی درجه دوم خواهیم داشت :

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot dx dy \quad (6 - 19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

با توجه به معادله پیوستگی خواهیم داشت

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (6-20)$$

از آنجائیکه کار نیرو برشی در سرعت‌های پایین ناچیز است لذا با صرف نظر کردن نیروی کار برشی و جایگذاری

$$\frac{K}{\rho c_p} = \alpha$$

معادله انرژی در لایه مرزی به صورت زیر خواهد بود :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6-21)$$

۱۱-۶ معادلات حاکم در لایه مرزی ، جریان آرام ، صفحه تخت :

ضریب جابجایی حرارتی و ضریب اصطلاک روی صفحه تخت را می توان با حل عددی یا حل توأم معادله پیوستگی ، ممنتوم و انرژی به صورت تحلیلی و یا به صورت تجربی تعیین کرد . لذا به صورت

خلاصه معادلات حاکم بر لایه مرزی بصورت زیر خواهند بود :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{معادله پیوستگی} \\ \text{معادله اندازه حرکت} \\ \text{معادله انرژی} \end{array} \quad (6-22)$$

برای سادگی ، در محاسبات دمای بدون بعد θ را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$\theta(x, y) = \frac{T_{(x,y)} - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (6 - 23)$$

به طوری که $\theta(x, y)$ روی لایه مرزی حرارتی یعنی جایی که $T = T_\infty$ برابر یک می شود . ولی مقدار $\theta(x, y)$ در روی صفحه که $T = T_w$ برابر صفر است . لذا معادله انرژی با توجه به تعریف فوق به صورت زیر خواهد بود :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6 - 24)$$

$$y = 0 \quad T = T_w \rightarrow \theta = 0 \quad \text{با توجه به شرایط مرزی}$$

$$y = \delta_t \quad T = T_\infty \rightarrow \theta = 1$$

حل دقیق معادله (۶-۲۴) بسیار مشکل خواهد بود زیرا باید اول مولفه های u, v را از معادله اندازه حرکت بدست آورده سپس معادله انرژی را حل نمایم لذا از حل تقریبی به روش انتگرال گیری استفاده می کنیم . برای این کار از معادله انرژی (۶-۲۴) در فاصله 0 تا α نسبت به y که بزرگتر از هر کدام از لایه های مرزی است انتگرال می گیریم و مولفه u را از معادله پیوستگی (۶-۱۱) بدست می آوریم و در معادله انرژی قرار می دهیم .

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$\int_0^\alpha u \frac{\partial \theta}{\partial x} dy + \int_0^\alpha V \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = \alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6 - 25)$$

مقدار $\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\alpha}$ برابر صفر است زیرا α در خارج از لایه مرزی قرار دارد بنابراین دمای آن ثابت لذا

گرادیان دما در خارج از لایه مرزی صفر است .

حال مولفه V در معادله (۶-۲۵) را با استفاده از رابطه پیوستگی حذف می کنیم یعنی دومین انتگرال

در معادله (۶-۲۵) را به روش جز به جز حساب می کنیم

$$\int_0^{\alpha} V \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = v\theta \Big|_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} \theta \frac{\partial V}{\partial y} dy = V \Big|_{y=\alpha} - \int_0^{\alpha} \theta \frac{\partial V}{\partial y} dy \quad (6-26)$$

چون $V \Big|_{y=0} = 0$ و $\theta \Big|_{y=\alpha} = 1$ می باشند و از طرفی داریم $V \Big|_{y=\alpha} = - \int_0^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} dy$

و از معادله پیوستگی $\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$ لذا اگر این دو مقدار در معادله (۶-۲۶) قرار گیرد داریم :

$$\int_0^{\alpha} V \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = - \int_0^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\alpha} \theta \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (6-27)$$

حال با جایگذاری معادله (۶-۲۷) در معادله (۶-۲۵) خواهیم داشت :

$$\int_0^{\alpha} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

و یا

$$\int_0^{\alpha} \left[u \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] dy = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\alpha = \delta_t} u(1 - \theta) dy \right] = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6 - 28)$$

توجه شود که مقدار انتگرال در $\alpha > \delta_t$ صفر است زیرا در خارج از لایه مرزی $\theta = 1$ و در نتیجه مقدار انتگرال برابر صفر است لذا حد نهایی انتگرال را به جای α یعنی δ_t قرار می دهیم و آنرا محاسبه میکنیم .

از طرفی حل معادله (۶-۲۸) نیز مشکل است زیرا دارای سه مجهول θ, δ_t, u می باشد. پس به دو رابطه دیگر نیز نیاز داریم لذا برای این کار معادله توزیع دما $\theta(x, y)$ در لایه مرزی δ_t را به صورت چند جمله ای زیر در نظر می گیریم.

$$\theta(x, y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 \quad 0 < y < \delta_t \quad (6 - 29)$$

شرایط مرزی برای حل معادله تقریبی توزیع دما و با توجه به معادله حاکمه در لایه مرزی :

$$\text{B. c. 1} \quad y = 0 \quad \theta = 0$$

$$\text{B. c. 2} \quad y = \delta_t \quad \theta = 1$$

$$\text{B. c. 3} \quad y = \delta_t \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (6 - 30)$$

$$\text{B. c. 4} \quad y = 0 \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

شرط اول و دوم از تعریف لایه مرزی گرمایی قابل درک است یعنی :

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

شرط سوم به این مفهوم است که در محدوده لبه لایه مرزی گرمای ، توزیع دما یکنواخت است پس شیب توزیع دما صفر است یعنی :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

شرط چهارم به مفهوم این است که در معادله کلی انرژی ، سرعت های u و v روی صفحه صفر است یعنی :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

با قراردادن چهار شرط مرزی بالا در معادله (۶-۲۹) مقادیر ثابت C_0 , C_1 , C_2 , C_3 تعیین می شود در نتیجه معادله توزیع دما به صورت زیر خواهد بود .

$$\theta = 3/2 \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - 1/2 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad (6 - 31)$$

به همین ترتیب برای پیدا کردن معادله توزیع سرعت $U(x, y)$ در لایه مرزی هیدرودینامیک چند جمله ای زیر را انتخاب می کنیم :

$$u(x, y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 \quad 0 < y < \delta_v \quad (6 - 32)$$

چهار شرط لازم برای پیدا کردن ثابت های چند جمله ای (۶-۳۲) عبارتند از:

B. c. 1	$y = 0$	$u = 0$
B. c. 2	$y = \delta$	$u = U_\infty$
B. c. 3	$y = \delta$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
B. c. 4	$y = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

سه شرط اول مستقیماً از تعریف لایه مرزی هیدرودینامیک نتیجه میشود و شرط چهارم نیز از معادله حرکت بطوریکه در $x=0$ هم u و هم v برابر صفر خواهند بود. لذا در نقطه $x=0$ طبق معادله حرکت $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ برابر صفر است. لذا با اعمال چهار شرط فوق در معادله (۶-۳۲) مقدار ثابتهای C_0 ، C_1 ، C_2 و C_3 تعیین شده در نتیجه معادله توزیع هیدرودینامیکی به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right)^3 \quad (6-33)$$

حال با داشتن معادله توزیع دما و معادله توزیع سرعت و قراردادن آنها در معادله انرژی (۶-۲۸) و با حل معادله مذکور، ضخامت لایه مرزی محاسبه خواهد شد. بنابراین با توجه به پیچیده بودن معادله (۶-۲۸) از ادامه حل معادلات دیفرانسیلی مذکور به صورت تحلیلی صرف نظر نموده و بصورت خلاصه نتایج حاصله از معادلات دیفرانسیلی مذکور را بیان می کنیم.

۱-۱۱-۶ معادلات تجربی در لایه مرزی جریان آرام صفحه تخت :

$$\delta_v = \frac{5x}{\sqrt{Re}} \quad \text{ضخامت لایه مرزی} \quad (6-34)$$

$$Nu = \frac{hL}{K} \Big|_{T_w = \text{const}} = 0.332 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{ناسلت دما ثابت} \quad (6-35)$$

$$Nu = \frac{hL}{K} \Big|_{q = \text{const}} = 0.417 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{ناسلت شار ثابت} \quad (6-36)$$

$$T_w = 0.332 Re^{-1/2} \rho U_\infty^2 \quad \text{تنش برشی} \quad (6-37)$$

$$q = hA(T_w - T_\infty) \quad \text{نرخ انتقال حرارت} \quad (6-38)$$

$$\frac{\delta_v}{\delta_t} = Pr^{1/3} \quad \text{ضخامت لایه مرزی} \quad (6-39)$$

$$D = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad \text{پروفیل دما} \quad (6-40)$$

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right)^3 \quad \text{پروفیل سرعت} \quad (6 - 41)$$

۶-۱۱-۲: معادلات تجربی در لایه مرزی، جریان مغشوش، صفحه تخت

$$\delta_v = \frac{0.381x}{\text{Re}^{1/5}} \quad \text{ضخامت لایه مرزی} \quad (6 - 42)$$

$$\text{Nu} = \frac{hL}{K} \Big|_{T_w = \text{const}} = 0.0296 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{ناسلت دما ثابت} \quad (6 - 43)$$

$$\text{Nu} \Big|_{q = \text{const}} = 1.04 \text{Nu} \Big|_{T_w = \text{const}} \quad \text{ناسلت شار ثابت} \quad (6 - 44)$$

$$\theta = \left(y / \delta_t \right)^{1/7} \quad \text{پروفیل دما} \quad (6 - 45)$$

$$T_w = 0.0296 \text{Re}^{-1/5} \rho U_{\infty}^2 \quad \text{تنش برشی} \quad (6 - 46)$$

$$\delta_v \approx \delta_t \quad \text{ضخامت لایه مرزی} \quad (6 - 47)$$

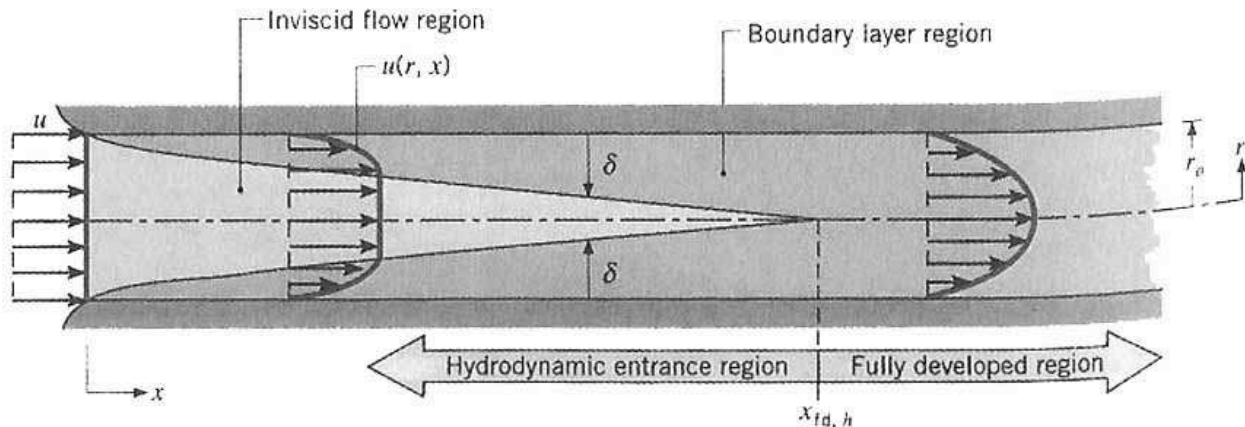
$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(y / \delta_v \right)^{1/7} \quad \text{پروفیل سرعت} \quad (6 - 48)$$

در لایه مرزی مغشوش گرادیان سرعت در سطح و در نتیجه تنش برشی روی سطح و گرادیان دما روی سطح و در نتیجه نرخ انتقال حرارت بسیار بیشتر از لایه مرزی آرام است

$$\text{Nu} = 1.04 \text{Nu} \Big|_{T_w = \text{const}} \quad \text{ناسلت شار ثابت} \quad (6 - 48)$$

۱۲-۶: جریان داخلی

سیال آرام با سرعت یکنواخت وارد لوله ای به شعاع r_0 می شود. شکل (۸-۶)



شکل (۸-۶) رشد لایه مرزی سرعت آرام در یک لوله

زمانیکه سیال با سطح داخلی لوله در تماس قرار گیرد اثرات لزجت ظاهر می شود و لایه مرزی متناسب با x افزایش می یابد و این افزایش منجر به نازک شدن ناحیه غیر لزجت سیال گردد و نهایتاً لایه های مرزی در محور لوله بهم دیگر می رسند فاصله محل تماس لایه های مرزی تا دهانه ورودی لوله را طول ورودی هیدرودینامیکی گویند و بعد از طول ورودی هیدرو دینامیک جریان کاملاً توسعه یافته است. و تمامی بحث ها مربوط به جریان داخلی بعد از طول هیدرو دینامیک است

بنابراین طول ورودی هیدرودینامیک در جریان آرام برابر $\frac{x}{D} = 0.05Re$ خواهد بود.

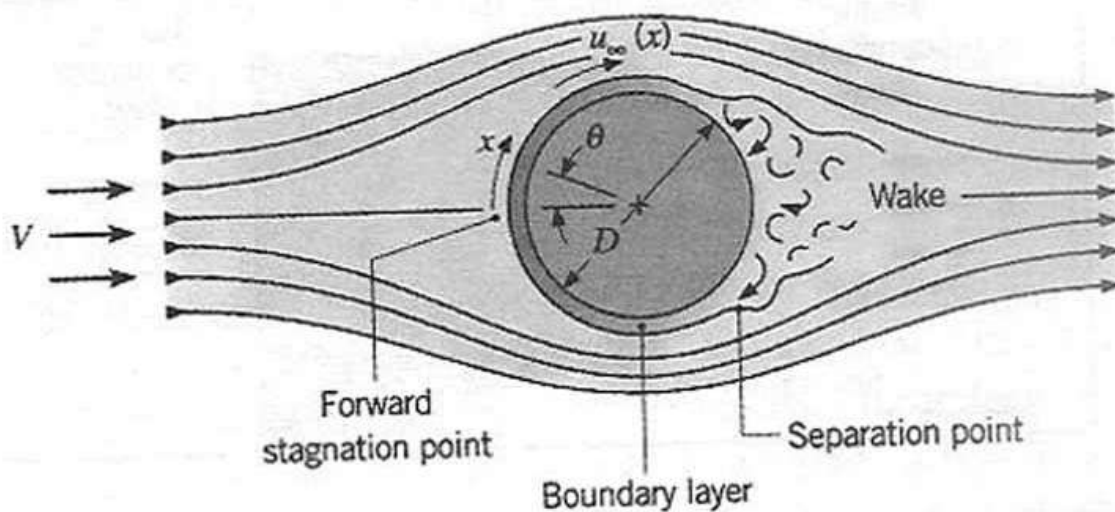
همچنین طول ورودی هیدرودینامیک در جریان درهم برابر $\frac{x}{D} \geq 10$ خواهد بود.

۱۳-۶: جریان سیال از روی استوانه

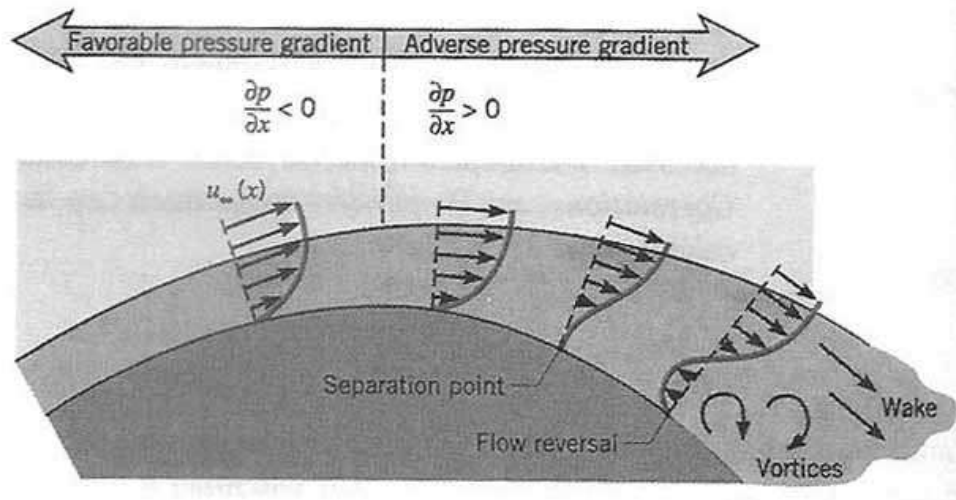
با توجه به شکل (۶-۹) و (۶-۱۰) به محض برخورد جریان سیال آزاد به نقطه جلوی استوانه سرعت آن صفر خواهد شد ولی فشار در این نقطه زیاد است ولی بعد از این نقطه با افزایش x در جهت حرکت عقربه های ساعت فشار کاهش می یابد در این صورت لایه مرزی تحت اثر گرادیان فشار مطلوب ($\frac{dP}{dx} < 0$) رشد می نماید این عمل تا آنجایی ادامه پیدا می کند که فشار به حداقل مقدار خود برسد ، و رشد لایه مرزی در پشت استوانه و با وجود گرادیان فشار نامطلوب به ($\frac{dP}{dx} > 0$) ادامه پیدا می کند .

وقتی که سرعت جریان آزاد خیلی پایین است ($Re < 4$) سیال به طور کامل دور استوانه پیچیده می شود و دو جریان سیال در بخش عقبی استوانه به طور منظم به هم می رسند . وقتی که سرعت جریان آزاد زیاد باشد . جریان دیگر نمی تواند به سطوح فوقانی بچسبد و از سطح استوانه جدا شده و در پشت آن تشکیل گردابه میدهد . این نقطه را نقطه جدایش گویند لذا در نقطه جدایش گرادیان سرعت در سطح جسم صفر است یعنی :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$



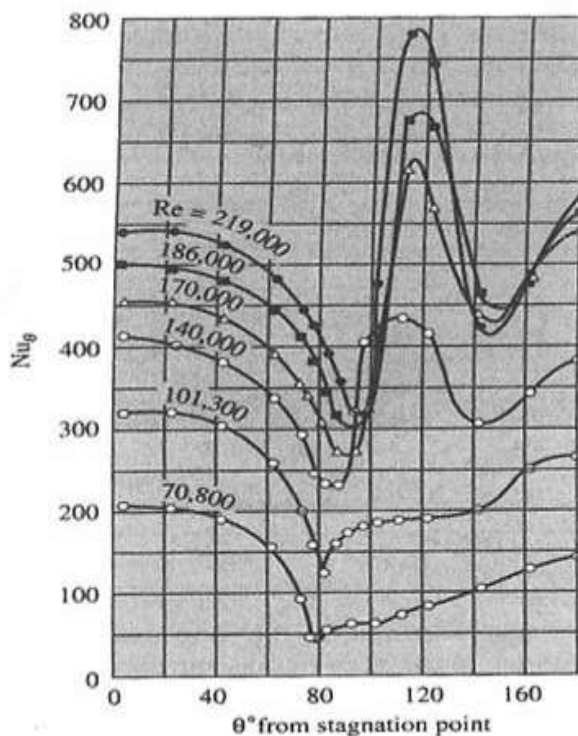
شکل (۶-۹) یک استوانه عمود بر جریان ایجاد لایه مرزی و جدائی روی



شکل (۶-۱۰) پروفیل سرعت مربوط به جدائی روی یک استوانه عمود بر جریان

۱۴-۶: انتقال حرارت جابجایی روی استوانه

چون جریان روی استوانه دارای پیچیدگی های است لذا برای تعیین انتقال حرارت از روش های تجربی کمک می گیریم شکل (۶-۱۱) نتایج تجربی تغییر ناسلت برحسب θ را برای یک استوانه عمود بر جریان هوا را نشان میدهد بطوریکه با افزایش θ به واسطه رشد لایه مرزی آرام، Nu_{θ} کاهش مییابد کمترین مقدار Nu_{θ} جریان در آرام $\theta \simeq 80^{\circ}$ رخ میدهد و در این نقطه جدایی اتفاق افتاده و وجود اختلاط ناشی از تشکیل گردابه باعث می شود که Nu_{θ} با θ افزایش یابد. از طرفی با افزایش $Re > 10^5$ تغییر Nu_{θ} با θ توسط دو مینیمم مشخص میشود. کاهش مقدار Nu_{θ} نسبت به مقدار آن در نقطه سکون ناشی از رشد لایه مرزی آرام است ولی افزایش ناگهانی Nu_{θ} بین 80° و 100° بواسطه تبدیل لایه مرزی آرام به مغشوش است لذا با رشد بیشتر لایه مرزی مغشوش Nu_{θ} دوباره شروع به کاهش می کند نهایتاً جدایی در $\theta = 140^{\circ}$ اتفاق می افتد.



شکل (۶-۱۱) عدد ناسلت برای جریان هوای عمود بر استوانه

لذا رابطه تجربی انتقال حرارت جابجایی بر روی استوانه عبارت خواهد بود .

$$NU_D = \frac{hD}{K} = CRe^n Pr^{1/3} \quad (6-48)$$

n, C در معادله (۶-۴۸) ثابت های هستند که مقدارشان از جدول (۶-۱) تعیین می گردند .

Re_D	C	m
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.466
4000-40,000	0.193	0.618
40,000-400,000	0.027	0.805

جدول (۶-۱) ثابتهای معادله (۶-۴۸) برای استوانه دایره ای عمود بر جریان

۱۵-۶: انتقال حرارت جابجایی در داخل استوانه

بعد از ناحیه ورودی هیدرودینامیکی پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته و بدون تغییر است و پروفیل سرعت برای جریان آرام سهموی و برای جریان مغشوش در جهت شعاع مسطح تر است بنابراین روابط تجربی زیر برای جریان داخلی یک استوانه برقرار است

$$Re_i = \frac{4m^0}{\pi D \mu} \quad \text{رینولدز داخل استوانه} \quad (6 - 49)$$

$$Re_i = \frac{4m^0}{\pi(D_o + D_i)\mu} \quad \text{رینولدز داخل پوسته} \quad (6 - 50)$$

$$NU_{q=const} = \frac{hD}{K} = 4.36 \quad \text{ناسلت داخل استوانه جریان آرام شار ثابت} \quad (6 - 51)$$

$$NU_{T_w=const} = \frac{hD}{K} = 3.66 \quad \text{ناسلت داخل استوانه جریان آرام دما ثابت} \quad (6 - 52)$$

$$NU_T = \frac{hD}{K} = 0.023 Re^{4/5} Pr^n \quad \text{ناسلت داخل استوانه جریان مغشوش} \quad (6 - 53)$$

$$T_w > T_\infty \quad \text{برای } n = 0/4$$

$$T_w < T_\infty \quad \text{برای } n = 0/3$$

برای محاسبه دقیق عدد ناسلت جریان آرام داخل پوسته می توان از جدول (۱-۲) ضمیمه کتاب استفاده گردد .

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho \frac{U_\infty^2}{2g} \quad \text{افت فشار داخل لوله} \quad (6 - 54)$$

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \quad \text{قطر هیدرولیکی} \quad (6 - 55)$$

۱۶-۶: خلاصه

با مطالعه این فصل بایستی بتوانیم با استفاده از موازنه انرژی و روابط انتقال حرارت جابجایی محاسبات لایه مرزی سرعت و لایه مرزی حرارت و پروفیل سرعت و دما در داخل لایه مرزی، تنش برشی و شدت انتقال حرارت داخلی و خارجی اشکال را انجام دهیم برای این کار لازم است ابتدا آرام یا مغشوش بودن جریان را تعیین کرده و سپس روابط هر جریان را با توجه به اشکال هندسی مربوط محاسبه می کنیم

۱- اگر جریان در روی صفحه کوچکتر یا مساوی 5×10^5 بوده جریان آرام و بزرگتر 5×10^5 جریان درهم است

۲- اگر جریان در داخل لوله کوچکتر یا مساوی 2300 بود جریان آرام و بزرگتر 2300 بود جریان درهم است

۳- نسبت ضخامت لایه مرزی سرعت به ضخامت لایه مرزی حرارت تابعی از عدد پرانتل است

۴- هرگاه عدد Pr بزرگتر از یک باشد ضخامت لایه مرزی سرعت از ضخامت لایه مرزی حرارت بلندتر است

۵- هرگاه عدد Pr کوچکتر از یک باشد ضخامت لایه مرزی سرعت از ضخامت لایه مرزی حرارت کوتاهتر است

۶- هرگاه ضخامت عدد Pr برابر یک باشد ضخامت لایه مرزی سرعت و ضخامت لایه مرزی حرارت برابراند

۷- خواص فیزیکی سیال تعیین کننده نسبت ضخامت های لایه مرزی سرعت و حرارت هستند

۸- عدد Pr در گازها تقریباً برابر یک و در فلزات مایع کوچکتر از یک هستند

۹- در جریان مغشوش ضخامت لایه مرزی سرعت برابر ضخامت لایه مرزی حرارت خواهد بود

فصل هفتم

آشنایی با مبدل‌های حرارتی

۱-۷ مبدل‌های حرارتی :

فرآیند تبادل حرارت بین دو سیال با دماهای متفاوت که توسط یک دیواره جامد جدا شده اند را مبدل حرارتی می گویند و براساس معیارهای مختلفی از جمله فرآیند انتقال ، هندسه و آرایشی که قرار می گیرند دسته بندی می شوند

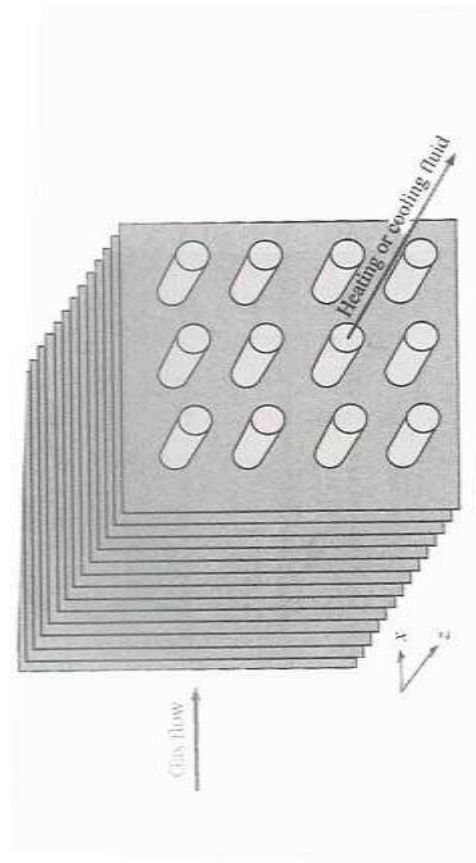
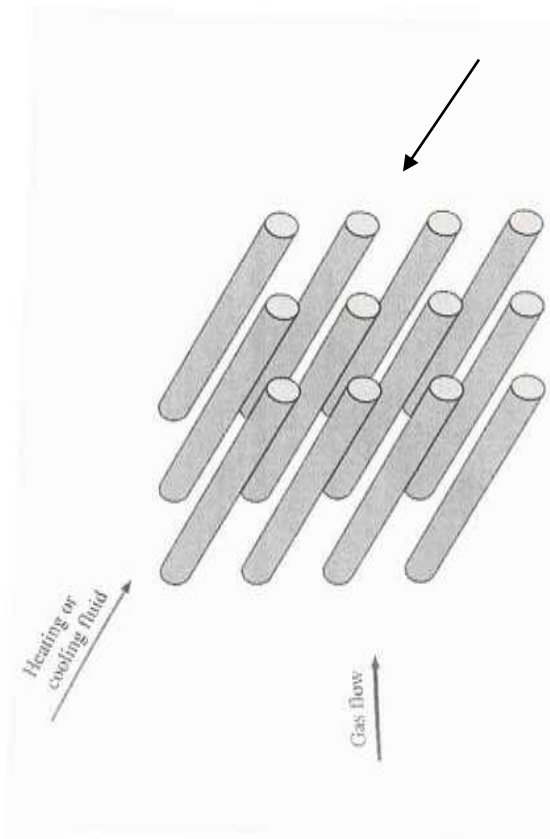
انتقال حرارت در مبدل حرارتی به صورت انتقال حرارت جابجایی در هر سیال و هدایت از طریق دیوار جدا کننده دو سیال می باشد

یکی از ساده ترین مبدل‌های حرارتی: مبدل های حرارتی دو لوله ای هستند که شامل دو لوله هم محور است که در لوله داخلی یک سیال و در لوله بیرونی (پوسته) سیال دیگر عبور می کند که عموماً به سه نوع تقسیم می گردند.

۱- جریان موازی : سیال گرم و سیال سرد هر دو از یک طرف مبدل وارد شده و از طرف دیگر مبدل خارج می شوند شکل (۱-۷)

۲- جریان مخالف : سیال گرم و سیال سرد از دو سمت جداگانه وارد مبدل و از آن خارج می شوند شکل (۱-۷)

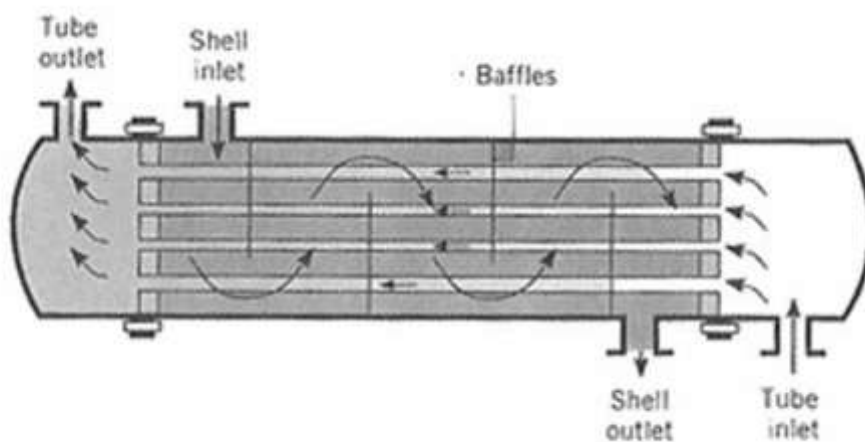
۳- جریان متقاطع : سیال سرد و سیال گرم به صورت عمود بر هم حرکت می کنند شکل (۱-۷)



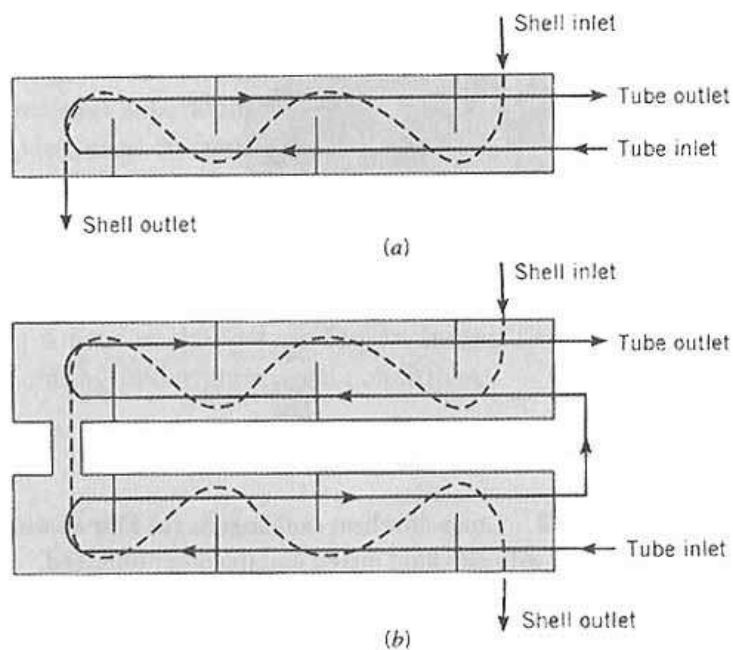
شکل (۷-۱) آرایش جریان در مبدل های دولوله ای

۷-۲ مبدل حرارتی لوله پوسته ای :

مبدل حرارتی لوله پوسته ای یکی از انواع متداول مبدل ها می باشد . اشکال خاص این نوع مبدل بر حسب تعداد پوسته و مسیرهای لوله تفاوت دارند و ساده ترین شکل آن شامل پوسته و لوله تک مسیر می باشد شکل (۷-۲) . نصب مغشوش کننده ها که معمولاً برای افزایش ضریب جابجائی سیال طرف پوسته صورت می گیرد ، موجب تحریک اغتشاش و افزایش سرعت عمود بر لوله ها می شود مبدل های حرارتی با مغشوش کننده با یک مسیر پوسته ، دو مسیر لوله ای و دو مسیر پوسته ، چهار مسیر لوله ای در شکل (۳-۷) نشان داده شده اند .



شکل (۷-۲) مبدل حرارتی لوله پوسته ای با یک مسیر پوسته و یک مسیر لوله



شکل (۷-۳) مبدل های حرارتی لوله و پوسته ای (a) یک مسیر پوسته و دو مسیر لوله.

(b) دو مسیر پوسته و چهار مسیر لوله.

۳-۷ تجزیه و تحلیل مبدل‌های حرارتی :

عموما در درس انتقال حرارت تجزیه و تحلیل مبدل‌های حرارتی به دو روش مورد بررسی قرار می‌گیرد

۱- استفاده از اختلاف دما متوسط لگاریتمی (LMTD) این روش زمانی کاربرد دارد که دماهای ورودی و خروجی سیالات مشخص باشند

۲- استفاده از روش راندمان (NTU) این روش زمانی کاربرد دارد که دماهای ورودی و خروجی سیال مشخص نباشد و در این فصل فقط روش اول مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۳-۷ محاسبات مبدل‌های حرارتی به روش اختلاف دمای متوسط لگاریتمی :

فرضیات لازم برای حل مسائل مربوط به مبدل‌های حرارتی به روش LMTD عبارتند از:

۱. مبدل حرارتی نسبت به محیط عایق بندی شده و تبادل حرارت منحصرأ بین سیال‌های سرد و گرم انجام می‌گیرد.
۲. از هدایت محوری در طول لوله‌ها صرف‌نظر می‌شود.
۳. از تغییرات انرژی پتانسیل و جنبشی صرف‌نظر می‌شود.
۴. گرمای ویژه سیال‌های سرد و گرم ثابت اند.
۵. ضریب انتقال حرارت کلی ثابت می‌باشد.

نکته: گرمای ویژه بواسطه تغییرات دما تغییر می‌کند. و ضریب انتقال حرارت کلی در نتیجه تغییرات خواص سیال و شرایط جریان تغییر می‌کند. ولی در اغلب مسائل مهندسی چنین تغییراتی مهم نیستند.

گام اول: با توجه به اینکه همواره دو نوع سیال یا گاز با دمای متفاوت در مبدل‌های حرارتی در جریان هستند بهتر آن است سیال یا گاز گرم را با اندیس h و سیال یا گاز سرد را با اندیس c مشخص نمائیم .

سیال گرم : $Th_i, Th_o, cp_h, m_h, \mu_h, h_h, k_h \dots$

سیال سرد : $Tc_i, Tc_o, cp_c, m_c, \mu_c, h_c, k_c \dots$

گام دوم: با مراجعه به جداول خواص سیالات یا گازها با توجه به دمای متوسط هر سیال یا گاز در ورود و خروج مبدل، مقدار عددی خواص مربوطه را تعیین می کنیم.

$$\left(\bar{T}_h = \frac{T_{h_i} + T_{h_o}}{2} \quad \text{و} \quad \bar{T}_c = \frac{T_{c_i} + T_{c_o}}{2} \right)$$

گام سوم: نرخ انتقال حرارت در هر مبدل، با اعمال موازنه ی کلی انرژی برای هر سیال بدست می آید.

$$q = m_h^{\circ} c_{p_h} (T_{h_i} - T_{h_o})$$

$$q = m_c c_{p_c} (T_{c_o} - T_{c_i})$$

گام چهارم: با تعیین نرخ انتقال حرارت، طول مورد نیاز مبدل حرارتی به شرح ذیل تعیین می گردد.

$$q = F \cdot U \cdot A \cdot \Delta T_m$$

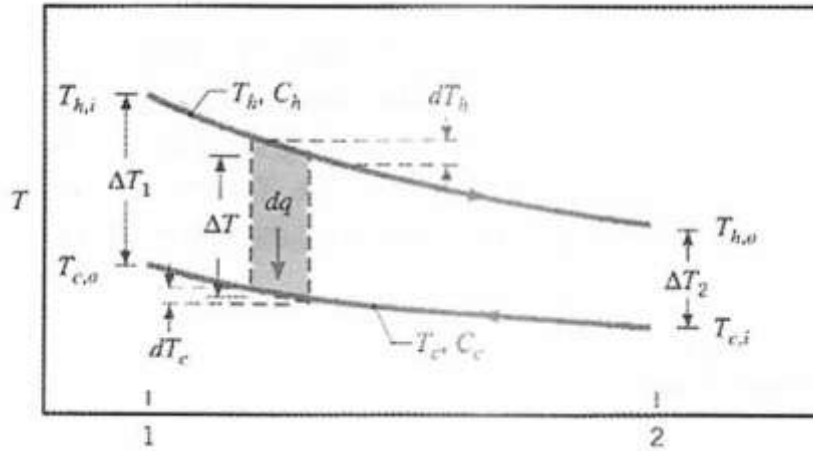
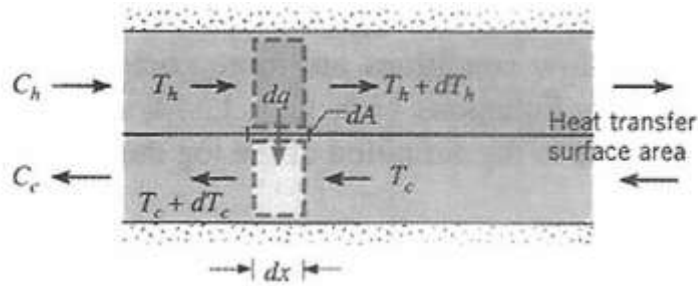
$$A = 2\pi r_i L \quad \text{که مقدار } A \text{ (سطح جانبی لوله داخلی) برابر است با}$$

گام پنجم: اختلاف دمای متوسط لگاریتمی را با توجه به معادله زیر تعیین می کنیم.

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_i - \Delta T_o}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_o}}$$

نکته: اگر مبدل جریان موازی و هم محور باشد. شکل (۴-۷)

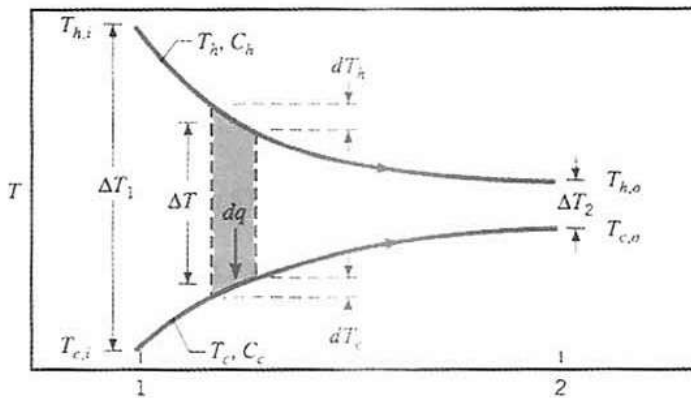
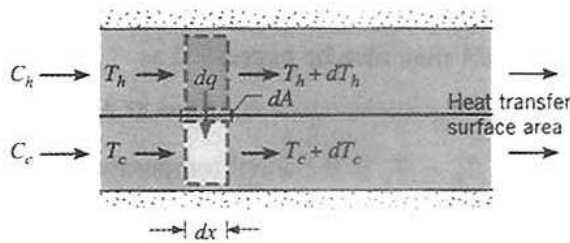
$$\begin{cases} \Delta T_i = T_{h_i} - T_{c_i} \\ \Delta T_o = T_{h_o} - T_{c_o} \end{cases}$$



شکل (۷-۴) توزیع های دما در یک مبدل حرارتی با جریان موازی

نکته : اگر مبدل جریان مخالف و هم محور باشد. شکل (۷-۵)

$$\begin{cases} \Delta T_i = Th_i - Tc_o \\ \Delta T_o = Th_o - Tc_i \end{cases}$$



شکل (۷-۵) توزیع های دما برای یک مبدل حرارتی با جریان مخالف

گام ششم: ضریب انتقال حرارت کلی مبدل به صورت زیر تعیین می شود.

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o} + \sum R}$$

که در معادله بالا h_o و h_i به ترتیب ضریب انتقال حرارت داخلی لوله و پوسته و $\sum R$ مجموع مقاومت های هدایتی جداره لوله و مقاومتهای رسوبی اعم از داخلی و خارجی لوله می باشند.

نکته: برای محاسبه مقدار h_o و h_i کافی است مقدار عددی Re را برای جریان داخلی و جریان خارجی تعیین و با توجه به نوع جریان آرام یا مغشوش بودن آنها به کمک روابط تجربی ناسلت ها (Nu) مقدار h_o و h_i را تعیین می کنیم.

$$Re_{D_i} = \frac{4m_i}{\pi D_i \mu} \quad \text{گام هفتم: برای تعیین مقدار } h_i \text{ (داخل لوله)}$$

نکته: اگر $Re_i \leq 2300$ باشد. آنگاه جریان آرام است و با توجه به روابط تجربی مربوطه برای جریان آرام مقدار h_i به صورت زیر تعیین می گردد.

$$NU = \frac{h_i D_i}{k_i} = 4.36 \quad \text{اگر } q = \text{const}$$

$$NU = \frac{h_i D_i}{k_i} = 3.66 \quad \text{اگر } T_w = \text{const}$$

نکته: اگر $Re > 2300$ باشد آنگاه جریان در هم است و با توجه به رابطه تجربی مربوطه برای جریان درهم مقدار h_i به صورت زیر تعیین می گردد.

$$NU = \frac{h_i D_i}{k_i} = 0.023 Re^{\frac{4}{5}} p_r^n$$

$$T_w > T_\infty \quad n = 0.4 \text{ برای گرمایش}$$

$$T_w < T_\infty \quad n = 0.3 \text{ برای سرمایش}$$

گام هشتم: تعیین مقدار h_o (داخل پوسته)

$$Re_{D_o} = \frac{4\dot{m}_o}{\pi(D_o + D_i)\mu_o}$$

با توجه به مقدار عددی Re که مقدار آن کوچکتر از 2300 یا بزرگتر از 2300 باشد همانند گام هفتم عمل می کنیم.

گام نهم: برای تعیین $(\sum R)$ مجموع مقاومت‌های هدایتی جداره لوله و مقاومت‌های رسوبی داخلی و خارجی لوله با توجه به اینکه لوله های مبدل حرارتی عموماً استوانه ای شکل هستند مقاومت هدایتی حرارتی و رسوبی آنها برابر خواهد بود با:

$$\sum R = \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi k_i L}$$

گام دهم: برای تعیین ضریب تصحیح F از اشکال مربوطه (۲-۱۳)، (۲-۱۴) و (۲-۱۵) و (۲-۱۶) ضمیمه ۲ کتاب با داشتن مقدار عددی $R = \frac{Th_i - Th_o}{Tc_o - Tc_i}$ و $P = \frac{Tc_o - Tc_i}{Th_i - Tc_i}$ و تعیین محل برخورد R و p و عمود نمودن محل برخورد R و P به محور عمودی اشکال مربوطه مقدار F تعیین می گردد.

گام یازدهم: با داشتن $q, F, U, \Delta T_m$ مقدار L به صورت زیر محاسبه می شود:

$$L = \frac{q}{FU \pi D_i \Delta T_m}$$

نکته: اگر مبدل حرارتی پوسته و لوله ای بود. دبی عبوری را حتماً بر تعداد لوله تقسیم نمائیم تا دبی عبوری از یک لوله بدست آید و محاسبات را برای یک لوله انجام دهید.

نکته: اگر مبدل حرارتی دو لوله ای بود. مقدار عددی $F=1$ خواهد بود.

نکته: تعداد مسیرهای لوله حتماً زوج باشد. اما مقدار مسیرهای پوسته می تواند زوج و یا فرد باشد.

نکته: اگر چنانچه طول پوسته را در مسئله ای مقید کرده باشند برای تعیین طول لوله مبدل ناچاراً باید طول لوله محاسبه شده از رابطه $L = \frac{q}{FU \pi D_i \Delta T_m}$ را بر عدد زوجی تقسیم نموده تا طول لوله جدید کوچکتر یا مساوی طول پوسته مقید شده گردد.

۷-۴ معیارهای انتخاب جریان برای لوله یا پوسته :

- ۱- سیالی که رسوب بیشتری دارد درون لوله ها جریان یابد . چون تمیز کردن داخل لوله ها آسان تر است.
- ۲- سیالی که خورنده است ، درون لوله ها جریان یابد زیرا در غیر اینصورت هم لوله و هم پوسته خورده خواهد شد.
- ۳- سیالی که فشارش بیشتر دارد درون لوله ها جریان یابد .
- ۴- سیالی که دارای ضریب انتقال گرمای کوچکتری است در سمت پوسته جریان یابد زیرا می تواند با نصب پره ها روی جداره خارجی لوله ها انتقال گرما را بیشتر کند
- ۵- سیالی که دبی جرمی کمتری دارد در سمت پوسته جریان یابد .
- ۶- سیالی که دمای آن به دمای محیط نزدیک است در سمت پوسته جریان یابد .
- ۷- سیال سمی درون لوله ها جریان یابد .
- ۸- سیال لزجتر در سمت پوسته جریان یابد چون عدد رینولدز پوسته به دلیل قطر بیشتر پوسته بزرگتر است.
- ۹- سیال گازی شکل در سمت پوسته جریان یابد .

۷-۵ بافل ها :

بافل ها دارای دو نقش مهم هستند : **الف** - نگه داشتن لوله ها و افزایش استحکام سازه ب- انحراف جریان در جهت عرضی و متقاطع با لوله ها بافل ها سبب افزایش انتقال گرما ، افزایش افت فشار و کاهش رسوب گرفتگی پوسته می شوند .

۱- با افزایش فاصله بافلها از هم ضریب انتقال گرما و افت فشار داخل پوسته هر دو کاهش می یابند.

۲- با افزایش تعداد گذر لوله ها و یا کاهش قطر لوله ها افت فشار افزایش می یابد.

۳- برای افزایش ضریب انتقال گرما در سمت لوله ها می توان تعداد گذر لوله ها را افزایش داد.

۴- برای افزایش ضریب انتقال گرما در سمت پوسته می توان فاصله بافلی را کاهش داد.

۶-۷ راه اندازی ، بستن ، مراقبت و نگهداری از مبدل های حرارتی پوسته و لوله :

از جمله مهم ترین اصول کار با مبدل های حرارتی داشتن اطلاعات کافی در زمینه شرایط کارکرد و عملیاتی یک مبدل است. همچنین رعایت اصول و قوانین موجود در رابطه با راه اندازی، از کار انداختن و همچنین مراقبت و بازدید مرتب از عملکرد یک مبدل جزء موارد ضروری در استفاده از یک مبدل می باشد. در این بخش اصول کلی که جهت انجام هر یک از اعمال فوق باید رعایت شود ذکر می گردد. قابل توجه است که بسته به شرایط عملیاتی و مسائل خاص هر واحد اصول دیگری نیز باید رعایت گردد.

۷-۷ راه اندازی (Start-up) :

یکی از عملیات مهم در استفاده از یک مبدل حرارتی راه اندازی آن است.

برای انجام عمل Start-up معمولاً نکات زیر مرحله به مرحله به اجرا در می آید :

۱. شیر تخلیه مایع سرد را باز می کنیم . (قسمت تیوب)

۲. شیر ورودی مایع سرد را به آهستگی و تماماً باز می کنیم.

۳. وقتیکه لوله ها کاملاً پر شدند شیر تخلیه مایع سرد را می بندیم.

۴. شیر خروجی مایع سرد را به اندازه کافی باز می کنیم.

۵. شیر تخلیه مایع گرم را باز می کنیم. (قسمت پوسته)

۶. شیر خروجی مایع گرم را باز می کنیم.

۷. شیر تخلیه مایع گرم را پس از پر شدن پوسته می بندیم.

۸. شیر ورودی مایع گرم را به آهستگی باز می کنیم.

۹. مقدار جریان هر دو مایع را برای دمای مناسب تنظیم می کنیم. (بوسیله شیرهای خروجی)
۱۰. درجه حرارت ها را بدقت بازرسی می کنیم.

۸-۷ بستن مبدلها :

جهت از کار انداختن یا از سرویس خارج کردن (Shut- Down) نکات زیر باید بترتیب مورد توجه قرار گرفته و انجام شود :

۱. شیر ورودی مایع گرم را به آهستگی و کاملاً می بندیم.
۲. شیر خروجی مایع گرم را به آهستگی و کاملاً می بندیم.
۳. مایع گرم درون پوسته را از طریق شیر تخلیه خالی می کنیم.
۴. شیر ورودی مایع سرد را کاملاً می بندیم.
۵. شیر خروجی مایع سرد را کاملاً می بندیم.
۶. مایع سرد درون لوله ها را از طریق شیر تخلیه خالی می کنیم.
۷. اگر مبدلها بطور موازی و سری کار می کنند باید مواظب جریان در مبدلهای دیگر باشیم.

۹-۷ بازرسی مبدلها حرارتی در حین کار کردن :

پس از در سرویس قرار دادن مبدل حرارتی کنترل ، مراقبت و بازرسی شرایط کارکرد و مقایسه آن با شرایط عملیاتی طراحی شده ، همواره بعنوان اصلی ترین برنامه برای یک اپراتور در نظر گرفته می شود . در مراقبت و بازرسی از یک مبدل حرارتی بطور معمول موارد زیر کنترل می گردد:

۱. درجه حرارت حین کار را بازرسی می کنیم.
۲. فشار حین کار را بازرسی می کنیم.
۳. از ایجاد شوک حرارتی جلوگیری می کنیم.
۴. در کولر باکس ها ، دسته لوله ها باید در آب غوطه ور باشند.
۵. تیوبهای ری بویلر باید در نفت غوطه ور باشند.
۶. از هر دو مایع درون مبدل نمونه گیری می کنیم.

۱۰-۷ تمیز کردن مبدل حرارتی :

معمولاً بعد از مدتی کار، رسوبات موادی که در داخل و بیرون دسته لوله ها جریان دارند ته نشین شده ، داخل لوله ها و فواصل بین آنها را پر می نماید ، بطوریکه از راندمان تبادل حرارتی کاسته میشود. در این موقع است که دسته لوله ها را برای تمیز کردن از پوسته خارج و بشرح ذیل اقدام می کنند:

۱. شستشو با آب داغ و با سرعت زیاد ، بعضی رسوبات نمک دار را در خود حل و تمیز مینماید.
۲. رسوبات داخل لوله ها را با برس سیمی استوانه ای شکل که توسط ماشین هوایی داخل لوله ها چرخانده می شود تراشیده و با فشار آب به خارج هدایت می کنیم .
۳. لابلای دسته لوله ها را با وسایل مناسبی تراشیده و با فشار آب تمیز می نمایند.
۴. اگر رسوبات طوری باشد که با وسایل معمولی تمیز نشود آنرا در محلول شیمیایی که بتواند رسوبات را در خود حل نماید قرار میدهند و سپس با آب فشار قوی شستشو میدهند. نباید لوله ها را تک تک با بخار یا مایع داغ تمیز نمود زیرا باعث انبساط نسبی و معیوب شدن آنها می گردد. معمولاً تمیز کردن داخل لوله ها آسانتر از بالای آنها از بیرون است لذا مایعی که بیشتر از خود رسوبات بر جا میگذارد از داخل تیوبها عبور میدهند .

۱۱-۷ آزمایش مبدلهای حرارتی :

آزمایش مبدلهای حرارتی ، به منظور پیدا کردن عیوب و نشتی های زیر انجام میگردد :

۱. ترک خوردگی یا سوراخ بودن پوسته
۲. معیوب بودن مسیرهای اتصال قطعات به پوسته
۳. شل بودن پیچ و مهره های قطعات متصل شده به پوسته
۴. سوراخ بودن Tube ها
۵. نشتی از درز لوله های معیوب
۶. عدم پرچ شدن صحیح Tube ها در صفحه لوله ها
۷. نشتی از محل اتصال قطعات به دسته Tube

آزمایش بوسیله مایع (معمولاً آب) و با فشار توصیه شده انجام داده میشود. این فشار ۱/۵ برابر فشار توصیه دستگاه هنگام کار است و روی تابلوی هر مبدل حرارتی نیز نوشته شده است. وسایل آزمایش انواع مبدلهای حرارتی بر حسب ساختمان آنها با هم دفرق می کنند و هر کدام، قطعات مربوط به خود برای آزمایش دارند. بطور کلی دو نوع آزمایش برای پیدا کردن عیوب فوق روی مبدلهای حرارتی انجام می گیرد :

۱۲-۷ آزمایش پوسته (Shell Test) :

آزمایش پوسته برای پیدا کردن عیوب ۱ تا ۵ مرحله قبلی انجام میگردد. پس از آماده کردن یعنی جدا کردن مبدل حرارتی از دستگاههای دیگر توسط فلنج و نصب فشار سنج، Shell را پر از آب کرده و پس از هواگیری توسط تلمبه فشار داخل پوسته را با اندازه لازم بالا می برند و سپس شیر تلمبه را می بندند. اگر معایب ۱ تا ۵ وجود نداشته باشد و وسایل اضافی که به منظور آزمایش نصب شده اند بدون عیب بوده و درست نصب شده باشند این فشار باید مدتی (حدود یک ساعت) ثابت بماند ، در غیر این صورت باید عیب را پیدا و آن را رفع نمود.

نکته : اگر در Tube ها سوراخی پیدا شود . با موافقت مهندسی عملیات میتوان تا ۱۵ درصد از تعداد کل آنها را کور (Plug) کرده و اجازه داد که مبدل حرارتی به کار خود ادامه دهد.

۱۳-۷ آزمایش لوله (Tube Test) :

آزمایش لوله برای پیدا کردن عیوب ۶ و ۷ مرحله قبلی بخصوص ترکهای موئی در زیر لوله ها که ممکن است در آزمایش پوسته بر اثر فشار وارده از بیرون به محیط لوله روی هم فشرده شده و معلوم نگردد، انجام میگردد. پس از آماده کردن مبدل، جهت تست لوله با تلمبه فشار داخل لوله ها را به اندازه تعیین شده بالا برده و شیر رابط بین تلمبه و دستة لوله را می بندند.. اگر عیوب ۶ و ۷ وجود نداشته باشد باید فشار تا مدتی ثابت بماند در غیر این صورت باید عیب را پیدا کرده و رفع نمود.

اگر درز لوله ها به مقدار بسیار کمی باز شده باشد بطوریکه فشار به آهستگی کاهش یابد مقدار را (حدود دو برابر فشار هنگام کار) بالا می برند که درز لوله باز شده و مایع به مقدار محسوس از مجرای خروجی پوسته خارج شود.

در غیر این صورت فقط معلوم میشود که لوله یا لوله ها یی درز باز کرده ، ولی معلوم نمی شود که کدام لوله است. جهت پیدا کردن لوله معیوب مجدداً آزمایش پوسته را بطریقی که قبلاً شرح داده شد انجام می دهند. مایع از بیرون لوله ها وارد لوله ای که درز باز کرده، می شود و انتها ی لوله معیوب بیرون می ریزد و بدین ترتیب لوله های معیوب ، معلوم می گردد.

۱۴-۷ گرفتگی (Fouling) :

به هر رسوب نامطلوب روی سطوح انتقال حرارت که منجر به افزایش مقاومت حرارتی و کاهش میزان انتقال حرارت بین سیال سرد و گرم می شود گرفتگی اطلاق می شود . عوامل ایجاد گرفتگی در لوله های مبدل حرارتی به طور خلاصه عبارتند از :

۱-۱۴-۷ رسوب های مواد نامحلول :

رسوب مواد نامحلول روی سطح انتقال حرارت باعث تشکیل مقاومتهای حرارتی می شود. سولفات کلسیم، سیلیکات منیزیم و کربنات لیتیم نمونه ای از این مواد هستند که با افزایش درجه حرارت میزان انحلال آنها کم می شود .

۲-۱۴-۷ رسوبهای ویژه :

زمانی که ذرات معلق جامد مانند (ماسه، غبار و...) در سیال وجود دارند ، تجمع آنها باعث تشکیل رسوب و نتیجه آن افزایش میزان مقاومت در مقابل انتقال حرارت می باشد .

۳-۱۴-۷ رسوبهای تشکیل دهنده ناشی از واکنشهای شیمیائی :

این رسوبها با انجام واکنش شیمیائی روی سطح انتقال حرارت تشکیل می شود. نمونه ای از این واکنشها عبارتند از : پلیمریزاسیون ، کراکینگ .

۴-۱۴-۷ رسوبهای تشکیل شده در اثر خوردگی :

در این مورد سطح انتقال حرارت لوله ها در یک واکنش شیمیائی شرکت می کند و خود به عنوان یک ماده اولیه عمل کرده و در طول واکنش خورده می شود .

۵-۱۴-۷ رسوبهای بیولوژیکی :

در اثر وجود میکرو ارگانیسم ها و مجاورت آنها در کنار سطوح انتقال حرارت تشکیل می شود .

۶-۱۴-۷ رسوبهای ناشی از سرد شدن مایعات (Freezing) :

این رسوبها در نتیجه عمل انجماد مایعات و سرد کردن مذابها در مبدلهای حرارتی تشکیل می شود.

۱۵-۷ رشد رسوبها :

رشد رسوبها و افزایش ضخامت آنها بستگی به زمان ، شرایط عملیاتی و ماهیت فیزیکی سیالهای سرد و گرم دارد .

۱۶-۷ هزینه های ناشی از تشکیل رسوب :

کل هزینه های از تشکیل رسوب شامل ، هزینه اولیه ، هزینه انرژی ، هزینه نگهداری و هزینه خارج کردن از سرویس می باشد .

۱۷-۷ ملاحظات مربوط به طراحی :

در طراحی مبدلهای حرارتی ، مقاومت حرارتی تشکیل شده ناشی از تشکیل رسوب توسط ضرایب بنام Fouling Factors لحاظ می گردد .

در جدول شماره (۷-۱) نمونه ای از این ضرایب مشخص گردیده است .

R _f (m ² .k/w)	سیال
۰/۰۰۰۱	آب دریا و آب تغذیه دیگ بخار (کمتر از 50c°)
۰/۰۰۰۲	آب دریا و آب تغذیه دیگ بخار (بالاتر از 50c°)
۰/۰۰۰۲ - ۰/۰۰۰۱	آب رودخانه (کمتر از 50c°)
۰/۰۰۰۹	سوخن مایع
۰/۰۰۰۲	مایعات مبرد
۰/۰۰۰۱	بخار (بدون روغن)

جدول (۷-۱) ضرایب رسوب

۷-۱۸ مسدود شدن مسیر حرکت بخار (Vapor Locking):

در صورتی که در حین عمل انتقال حرارت بین سیالهای سرد و گرم، در یک مبدل حرارتی پوسته و لوله تغییر فاز بوجود آید (بویژه عمل میعان) و سیالی که تغییر فاز داده، در قسمت لوله قرار گیرد، باید به این نکته توجه شود که در اثر میعان بخار و تبدیل بخشی از آن به مایع، به تدریج سرعت حرکت بخار، کم می شود. چنانچه این کاهش در سرعت بخار، به اندازه ای باشد که موجب توقف حرکت آن گردد، پدیده مسدود شدن مسیر حرکت بخار (Vapor Locking) اتفاق می افتد. برای جلوگیری از رخ دادن پدیده ی مذکور، باید سرعت حرکت را افزایش داد. ضمناً باید توجه داشت که افزایش بیش از حد سرعت بخار موجب بروز عمل طغیان (Flooding) خواهد شد. بنابراین، در طراحی مبدلهای حرارتی و تعیین اندازه مناسب سطح انتقال حرارت (اندازه لوله)، توجه به تذکرات مذکور بسیار حائز اهمیت است.

۷-۱۹ خلاصه:

۱. اگر دو سیال تمیز و پاک و بدون رسوب باشند انتخاب محل جریان آنها در لوله یا پوسته اشکالی ایجاد نمی کند و تمام انواع مبدلهای حرارتی در این مورد قابل استفاده میباشند.
۲. اگر یکی از دو سیال کثیف باشد بهتر است در لوله ها جریان پیدا کند چون تمیز کردن لوله ها آسان تر است و در این صورت دسته لوله ها باید از نوع مستقیم باشد و نوع U- تیوب نا مناسب است.
۳. اگر یکی از دو سیال گازی و یا گاز همراه با مایع باشد بهتر است که در Shell جریان داشته باشد.

۴. اگر نگهداری سرما یا گرمای یکی از دو سیال از نظر اقتصادی مهم باشد بهتر است در لوله ها جریان داشته باشد.
۵. اگر سرما و یا گرمای سیالی که در پوسته یا Shell جریان دارد زیاد باشد و نیز اگر کنترل درجه حرارت دو سیال مهم باشد در اینصورت مبدل حرارتی باید عایق بندی شود.
۶. اگر اختلاف درجه حرارت در سیال زیاد باشد از مبدل حرارتی نوع U-Tube یا Floating Head باید استفاده نمود. استفاده از مبدل حرارتی Fixed Head وقتی ممکن است که پوسته این مبدل حرارتی دارای اتصال انبساطی (Joint Expansion) باشد.
۷. اگر هدف مایع کردن بخار باشد (Condensation) در این صورت آن بخار باید وارد پوسته مبدل حرارتی شود.
۸. اگر یکی از دو سیال آب باشد درجه حرارت آن نباید از (۱۲۰ درجه فارنهایت یا ۵۰ درجه سانتیگراد) تجاوز کند. چون در غیر اینصورت در داخل مبدل حرارتی تشکیل رسوب ($CaCO_3$) خواهد داد.
۹. اگر یکی از دو سیال در حین تبادل حرارت درجه حرارتش بحدی برسد که امکان تبخیر داشته باشد (مایع) بهتر است که از قسمت پائین مبدل وارد و از بالای آن خارج شود.
۱۰. اگر حجم دو سیال (سرعت \times قطر جریان) کم و اختلاف درجه حرارت آنها زیاد باشد در غیر این صورت از مبدلهای حرارتی چند مسیر و یا مبدل حرارتی دو لوله ای (Double Pipe) استفاده میشود.
۱۱. اختلاف دمای متوسط لگاریتمی جریان مخالف بزرگتر از جریان موازی است.
۱۲. مقدار F برای جریان های متقاطع و چند مسیره کمتر از ۱ و برای جریان مخالف یک مسیره برابر ۱ است.
۱۳. هرگاه تغییرات دمای یک سیال عبوری از مبدل تقریباً ثابت باشد (ناچیز) ضریب تصحیح آن برابر ۱ خواهد بود. یعنی رفتار مبدل مذکور منفل از آرایش جریان است و این اتفاق زمانی بوقوع میپیوندد که یکی از سیال ها تغییر فاز دهد.

ضمیمه ۱

خلاصه روابط کاربردی برای حل

مسائل انتقال حرارت I

۱-۱ روشهای انتقال حرارت :

$$q = KA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

انتقال حرارت هدایت (یک بعدی پایدار)

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

انتقال حرارت جابجایی

$$q = f_G f_\varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

انتقال حرارت تشعشی

$$\sigma = 5.669 * 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

۱-۲ مقاومت گرمایی:

$$\text{دیوار مسطح} \left\{ \begin{array}{l} \text{هدایت} \quad R_{\text{cond}} = \frac{L}{KA} \\ \text{جابجایی} \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA} \end{array} \right.$$

$$\text{استوانه} \left\{ \begin{array}{l} \text{هدایت} \quad R_{\text{cond}} = \frac{Ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi LK} \\ \text{جابجایی} \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{2\pi r Lh} \end{array} \right.$$

$$\text{کره} \left\{ \begin{array}{l} \text{هدایت} \quad R_{\text{cond}} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi K r_1 r_2} \\ \text{جابجایی} \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{2\pi r^2 h} \end{array} \right.$$

$$r_c = \frac{K}{h}$$

* شعاع بحرانی استوانه

$$r_c = \frac{2K}{h}$$

* شعاع بحرانی کره

۴-۱ پره ها :

$$q_o = hA_o(T_o - T_\infty)$$

انتقال حرارت قبل از پره گذاری

$$q_T = q_f + q_{uf}$$

انتقال حرارت بعد از پره گذاری

$$q_f = N \cdot \eta_f \cdot h \cdot A_f(T_o - T_\infty)$$

$$q_{uf} = hA_{uf}(T_o - T_\infty)$$

$$\epsilon_f = \frac{\text{نرخ انتقال حرارت با پره}}{\text{نرخ انتقال حرارت بدون پره}} = \frac{q_{ToT}}{q_o}$$

ضریب تاثیر پره

۵-۱ انتقال حرارت هدایتی ناپایدار :

$$Bi = \frac{hL_c}{K}$$

عدد بدون بعد بایو

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{\text{حجم}}{\text{سطح}}$$

طول مشخصه

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

عدد بدون بعد فوریه

$$Pr = \frac{\rho c_p}{\alpha}$$

عدد بدون بعد پرائتل

$$Nu = \frac{hL}{K}$$

عدد بدون بعد ناسلت

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} = \frac{UL}{\vartheta}$$

عدد بدون بعد رینولدز

$$S_t = \frac{Nu}{RePr} = C_f/2 = S_t Pr^{2/3}$$

عدد بدون بعد استانتون

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{mC_p}t}$$

معادله توزیع دما و زمان در سیستم ظرفیت فشرده حرارتی

نکته: شرط به کارگیری سیستم ظرفیت فشرده حرارتی $Bi \leq 0.1$ است

$$Q = Q_i \left(1 - e^{-\frac{hA}{mC_p}t} \right)$$

کل انرژی منتقله از لحظه شروع ناپایداری حرارتی تا زمان t

$$Q_i = mC_p(T_i - T_{\infty})$$

حرارت داخلی اولیه جسم نسبت به محیط اطراف

۶-۱ انتقال حرارت جابجایی:

$$Re \leq 5 * 10^5$$

جریان آرام ، صفحه تخت

$$Re > 5 * 10^5$$

جریان درهم ، صفحه تخت

$$Re \leq 2300$$

جریان آرام ، داخل استوانه

$$Re > 2300$$

جریان درهم ، داخل استوانه

۱-۶-۱ جریان آرام ، صفحه تخت :

$$\frac{\delta_V}{x} = \frac{5}{(Re)^{1/2}}$$

ضخامت لایه مرزی سرعت

$$C_f = 0.664 Re^{-1/2}$$

ضریب اصطلاک

$$\tau_w = 0.332Re^{-1/2} \cdot \rho U_\infty^2$$

تنش برشی موضعی

$$NU = \frac{hL}{K} = 0.664Re^{1/2}Pr^{1/3}$$

ناسلت (اگر دمای صفحه ثابت باشد)

$$NU = \frac{hL}{K} = 0.417Re^{1/2}Pr^{1/3}$$

عدد ناسلت (اگر شار حرارتی ثابت باشد)

$$\frac{\delta_v}{\delta_t} = Pr^{1/3}$$

ضخامت لایه مرزی حرارت

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_v} \right)^3$$

پروفیل سرعت

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad \theta = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3$$

پروفیل دما

۲-۶-۱ جریان مغشوش ، صفحه تخت :

$$\frac{\delta_v}{x} = \frac{0.381}{Re^{1/5}}$$

ضخامت لایه مرزی سرعت

$$\delta_v \approx \delta_t$$

ضخامت لایه مرزی حرارت

$$C_f = 0.0592Re^{-1/5}$$

ضریب اصطلاک

$$NU = \frac{hL}{K} = 0.0296Re^{1/5}Pr^{1/3}$$

عدد ناسلت (اگر شار حرارتی ثابت باشد)

$$NU \Big|_{q = const} = 1/04 NU \Big|_{T = const}$$

عدد ناسلت (اگر شار حرارتی ثابت باشد)

$$\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta_v} \right)^{1/7}$$

پروفیل سرعت

$$\theta = \left(y / \delta_t \right)^{1/7}$$

پروفیل دما

$$\tau_w = 0.0296 R_e^{-1/5} (\rho U_\infty^2)$$

تنش برشی موضعی

۱-۷ جریان روی استوانه :

$$NU = \frac{hD}{K} = C R_e^n P_r^{1/3}$$

عدد ناسلت

مقدار n و C از جدول (۱-۶) تعیین می شوند .

نکته : محاسبات در داخل استوانه و اشکال بسته برای بعد از طول هیدرولیک که جریان کاملاً توسعه یافته می باشد دارای اعتبار است .

۱-۸ جریان آرام داخل استوانه :

$$NU = \frac{hD}{K} = 4.36$$

عدد ناسلت (اگر شار حرارتی ثابت باشد)

$$NU = \frac{hD}{K} = 3.66$$

عدد ناسلت (اگر دما ثابت باشد)

۱-۹ جریان درهم داخل استوانه :

$$NU = \frac{hD}{K} = 0.023Re^{0.8}Pr^n$$

عدد ناسلت

$$n = 0.4$$

برای گرمایش $T_w > T_\infty$

$$n = 0.3$$

برای سرمایش $T_w < T_\infty$

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho \frac{U_\infty^2}{2g}$$

افت فشار داخل استوانه

$$D_h = \frac{4A_c}{P}$$

قطر هیدرولیک

۱۰-۱ مبدل حرارتی :

*روش اختلاف دمای متوسط لگاریتمی LMTD

$$q = \dot{m}_h C_{P_h} (T_{h_i} - T_{h_o})$$

موازنه انرژی برای سیال گرم

$$q = \dot{m}_c C_{P_c} (T_{c_o} - T_{c_i})$$

موازنه انرژی برای سیال سرد

$$q = F \cdot U \cdot A \cdot \Delta T_m$$

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_i - \Delta T_o}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_o}}$$

اختلاف دمای متوسط

$$\text{جریان موافق} \begin{cases} \Delta T_i = T_{h_i} - T_{c_i} \\ \Delta T_o = T_{h_o} - T_{c_o} \end{cases}$$

$$\text{جریان مخالف} \begin{cases} \Delta T_i = T_{h_i} - T_{c_o} \\ \Delta T_o = T_{h_o} - T_{c_i} \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}}$$

ضریب کلی انتقال حرارت

$$A = \pi DL$$

سطح جانبی لوله

$$\dot{m} = \rho VA$$

جرم عبوری از لوله

$$R_{D_i} = \frac{4\dot{m}_i}{\pi D_i \mu}$$

رینولدز داخل لوله

$$R_{D_o} = \frac{4\dot{m}_o}{\mu(D_o + D_i)\pi}$$

رینولدز داخل پوسته

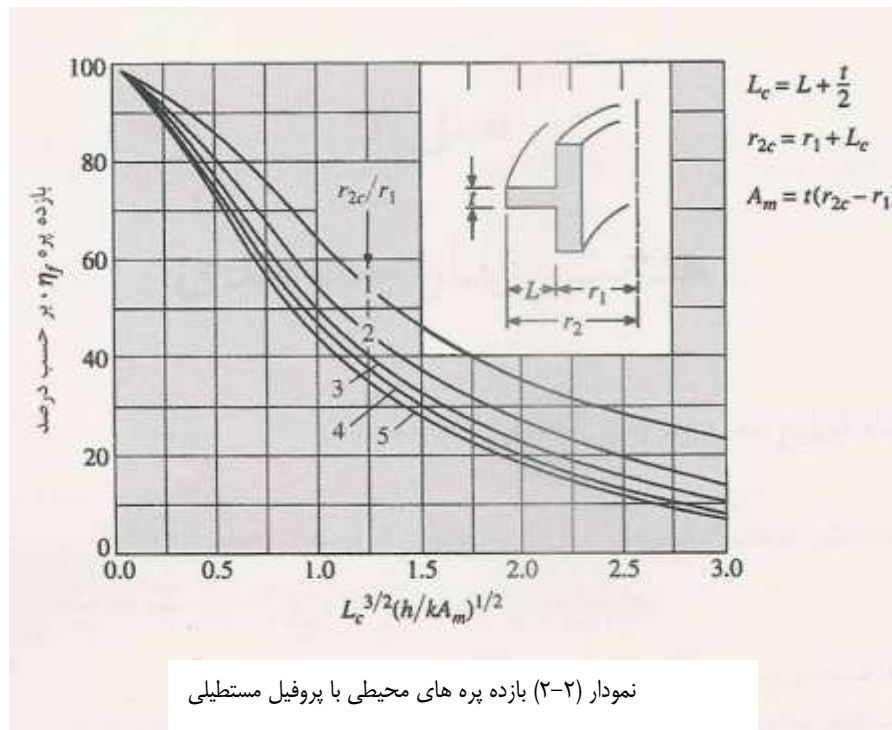
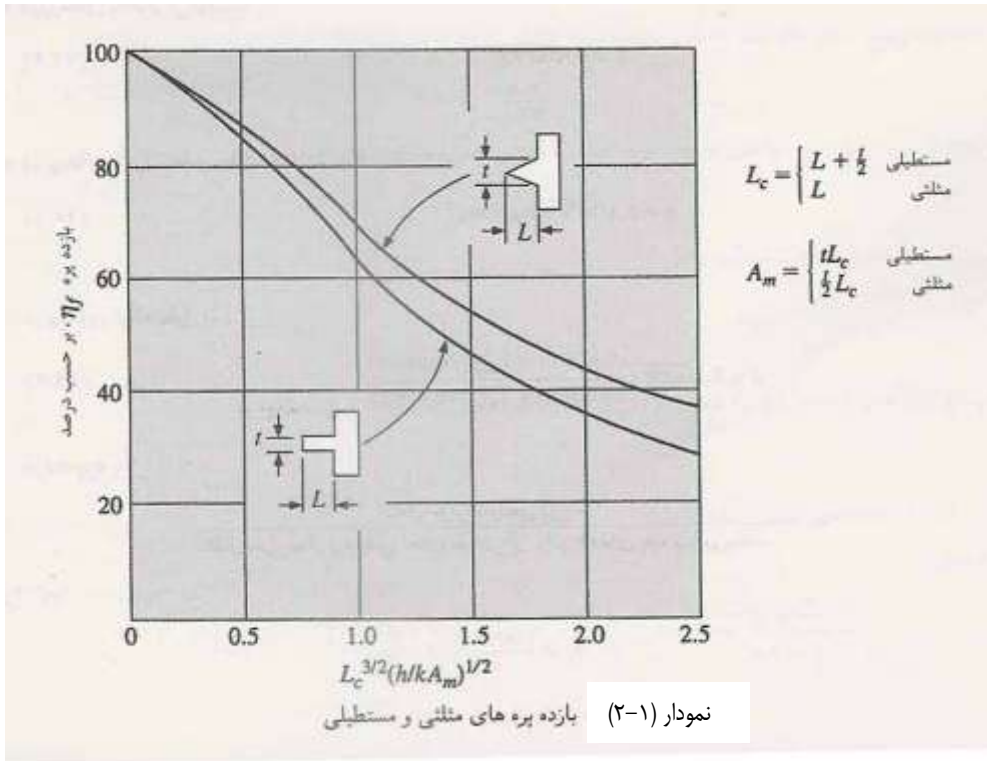
$$L = \frac{q}{FU\pi D_i \Delta T_m}$$

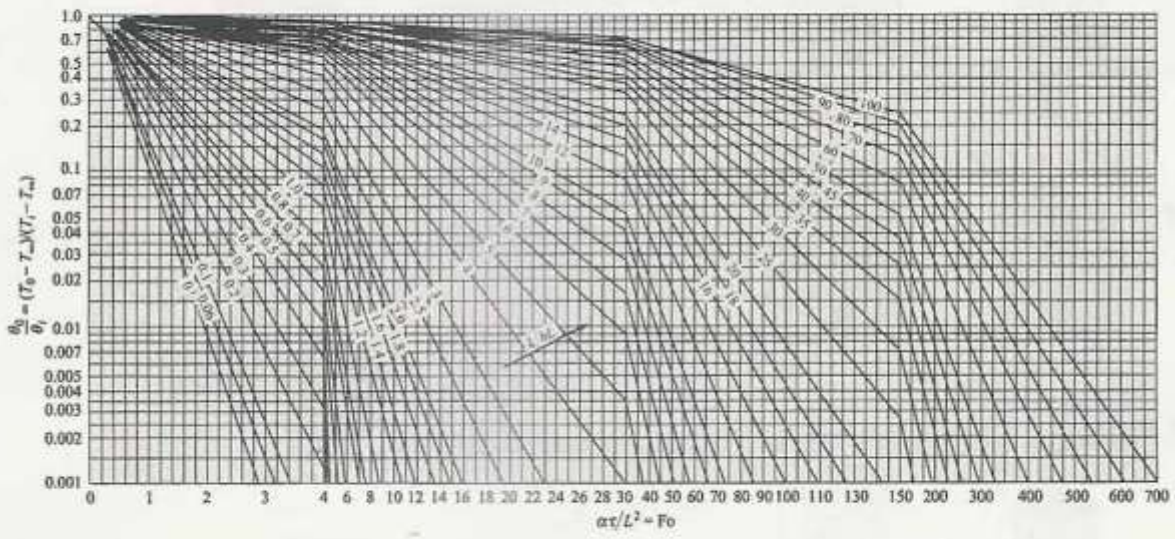
طول مورد نیاز مبدل

ضمیمه ۲

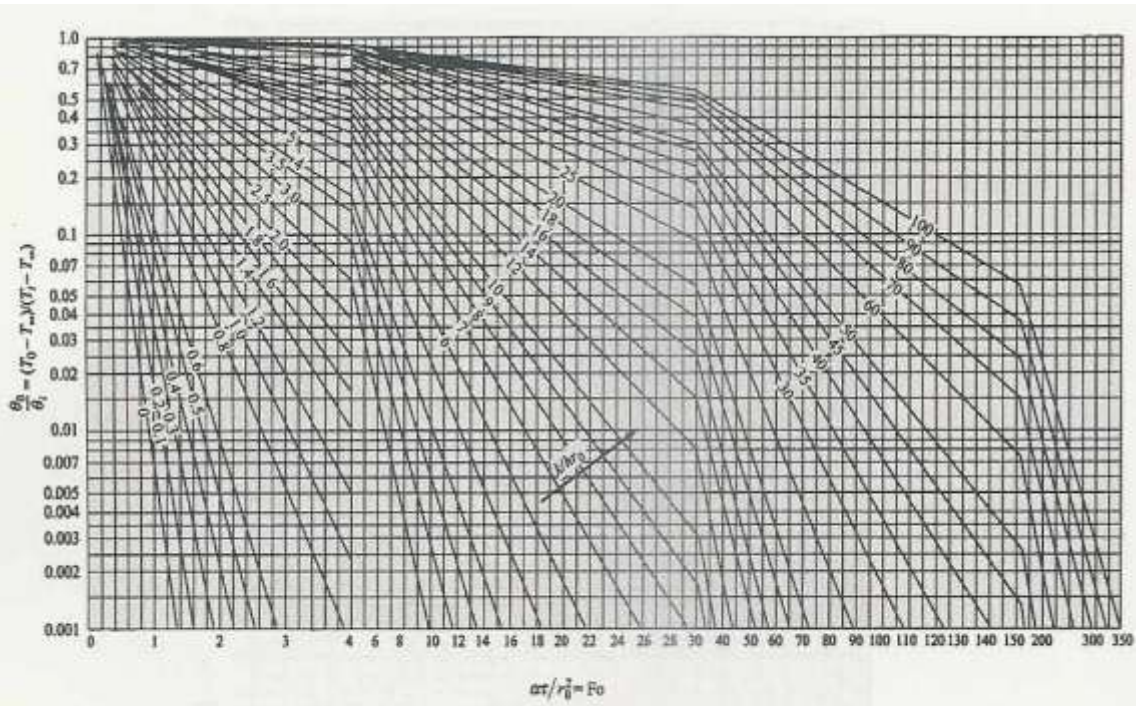
نمودارهای کاربردی برای حل

مسائل انتقال حرارت I

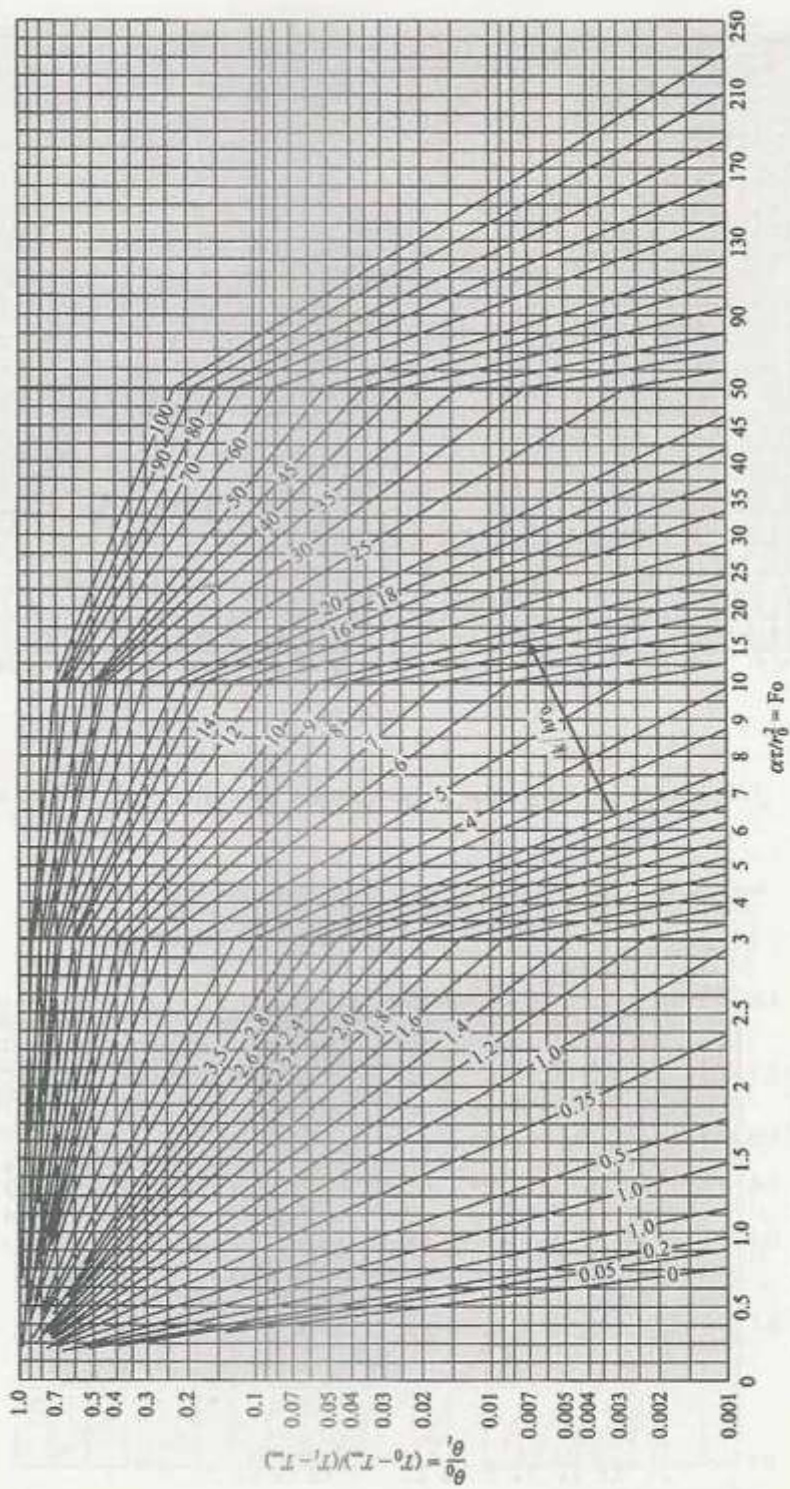




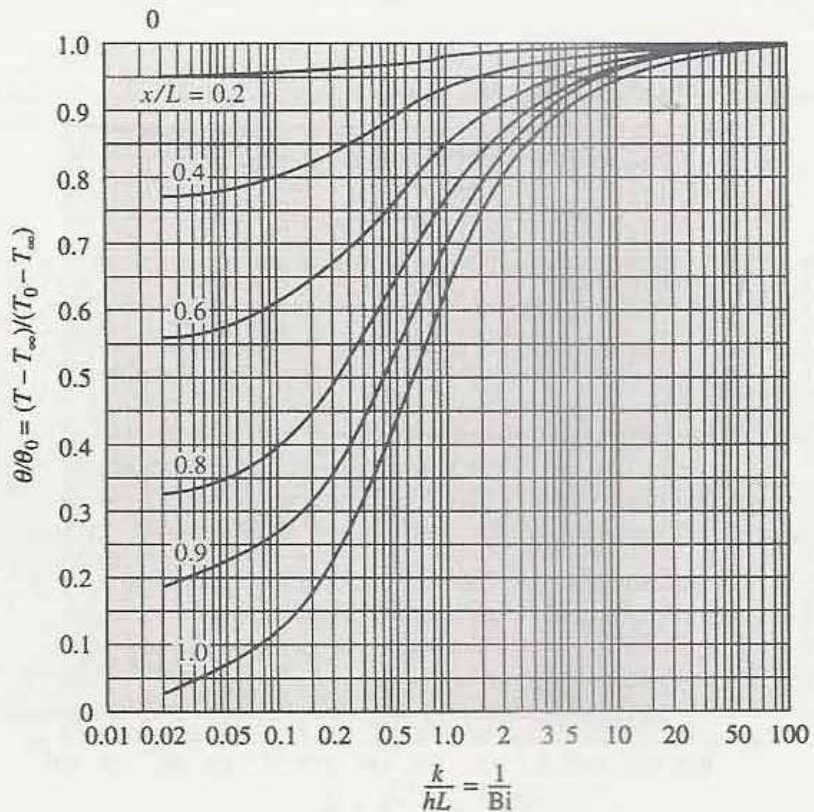
نمودار (۲-۳) دمای صفحه میانی یک صفحه بی نهایت به ضخامت $2L$ در مقیاس کامل



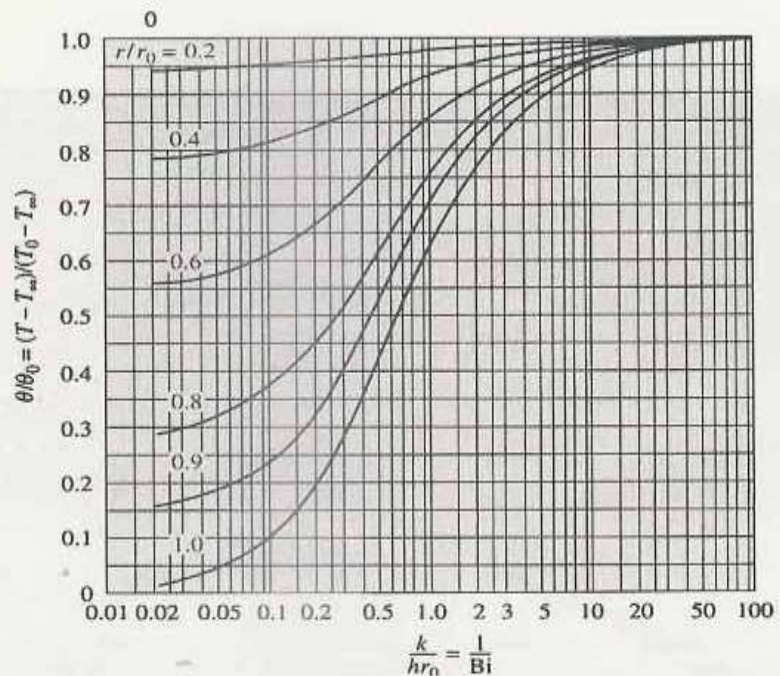
نمودار (۲-۴) دمای محور استوانه‌ای بطول بی نهایت و شعاع r_0 در مقیاس کامل



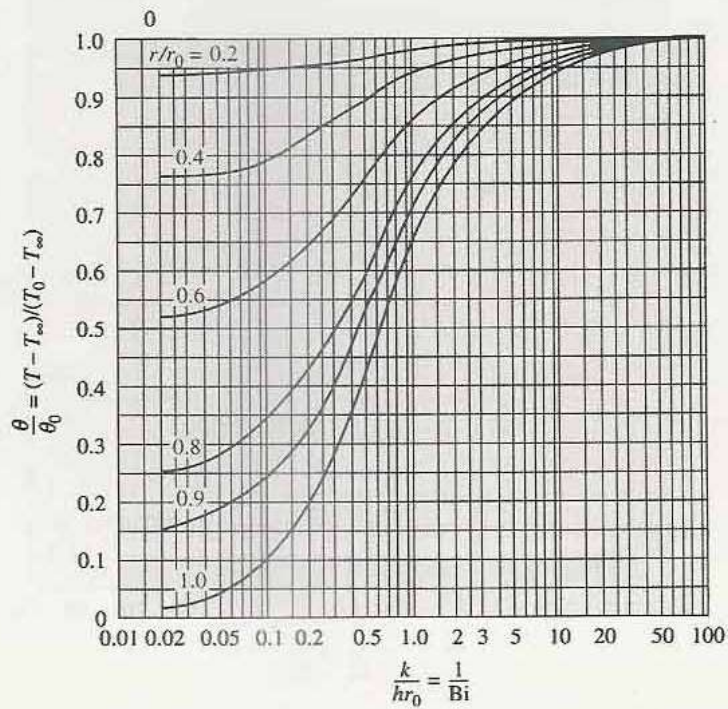
نمودار (۲-۵) دمای محور کوره‌ای به شعاع r_0 در مقیاس کامل



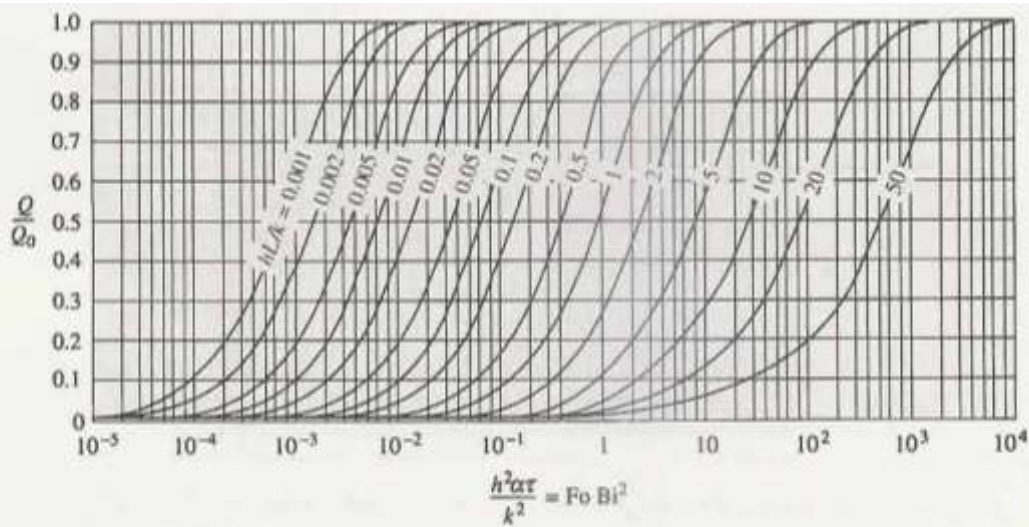
نمودار (۲-۶) دما به عنوان تابعی از دمای مرکز صفحه بی نهایت به ضخامت $2L$



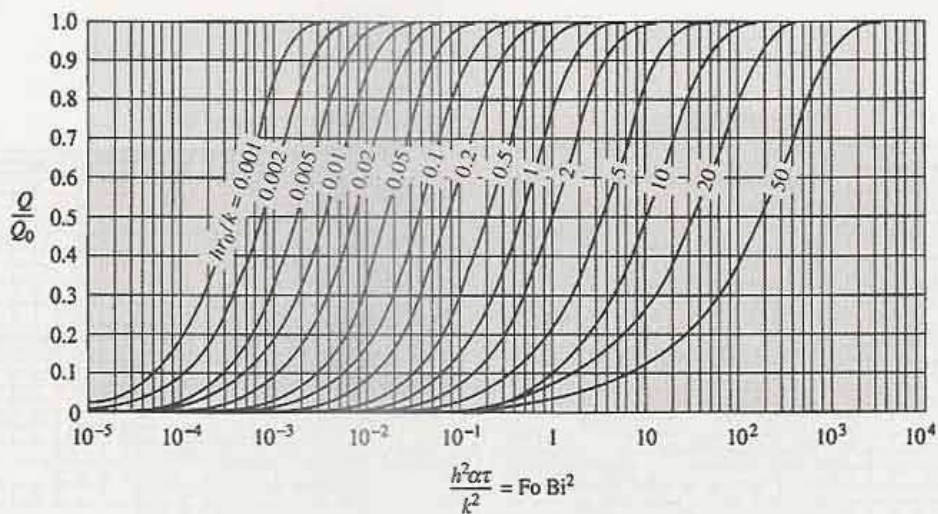
نمودار (۲-۷) دما به عنوان تابعی از دمای محور یک استوانه بطول بی نهایت و شعاع r_0



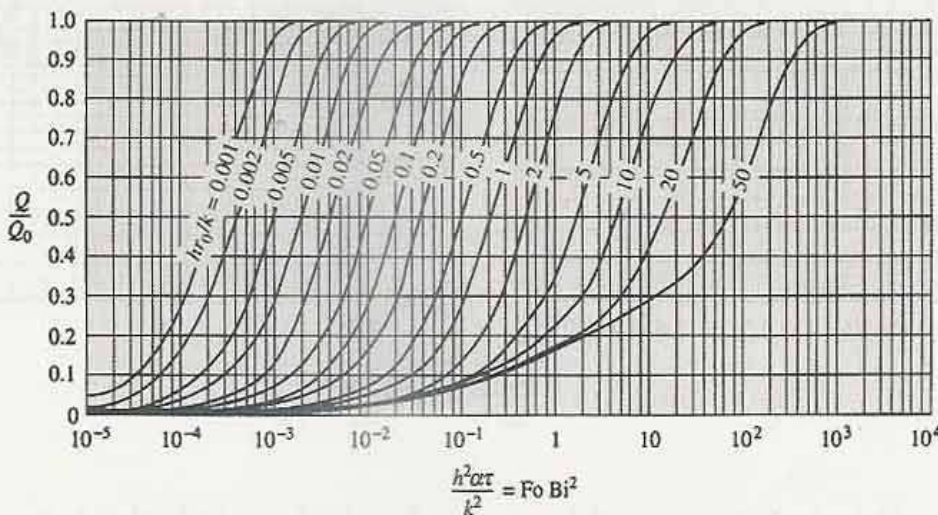
نمودار (۲-۸) دما به عنوان تابعی از دمای مرکز کره‌ای به شعاع r_0 .



نمودار (۲-۹) انتقال حرارت بدون بعد $\frac{Q}{Q_0}$ نسبت به زمان برای صفحه نامحدود به ضخامت $2L$.



نمودار (۲-۱۰) انتقال حرارت بدون بعد $\frac{Q}{Q_0}$ نسبت به زمان برای استوانه به طول بی نهایت و شعاع r_0 .



نمودار (۲-۱۱) انتقال حرارت بدون بعد $\frac{Q}{Q_0}$ نسبت به زمان برای کره ای به شعاع r_0 .

(الف) $P(X)S(X_1)$

(ب) $P(X_1)S(X_2)$

(ج) $S(X)P(X_1)P(X_2)$

(د) $P(X_1)P(X_2)P(X_3)$

(ه) $C(\Theta)S(X)$

(و) $C(\Theta)P(X)$

(الف) $T_0 =$ دمای خط میانی

(ب) $T_0 =$ دمای محور

(ج) $T_0 =$ دمای مرکز

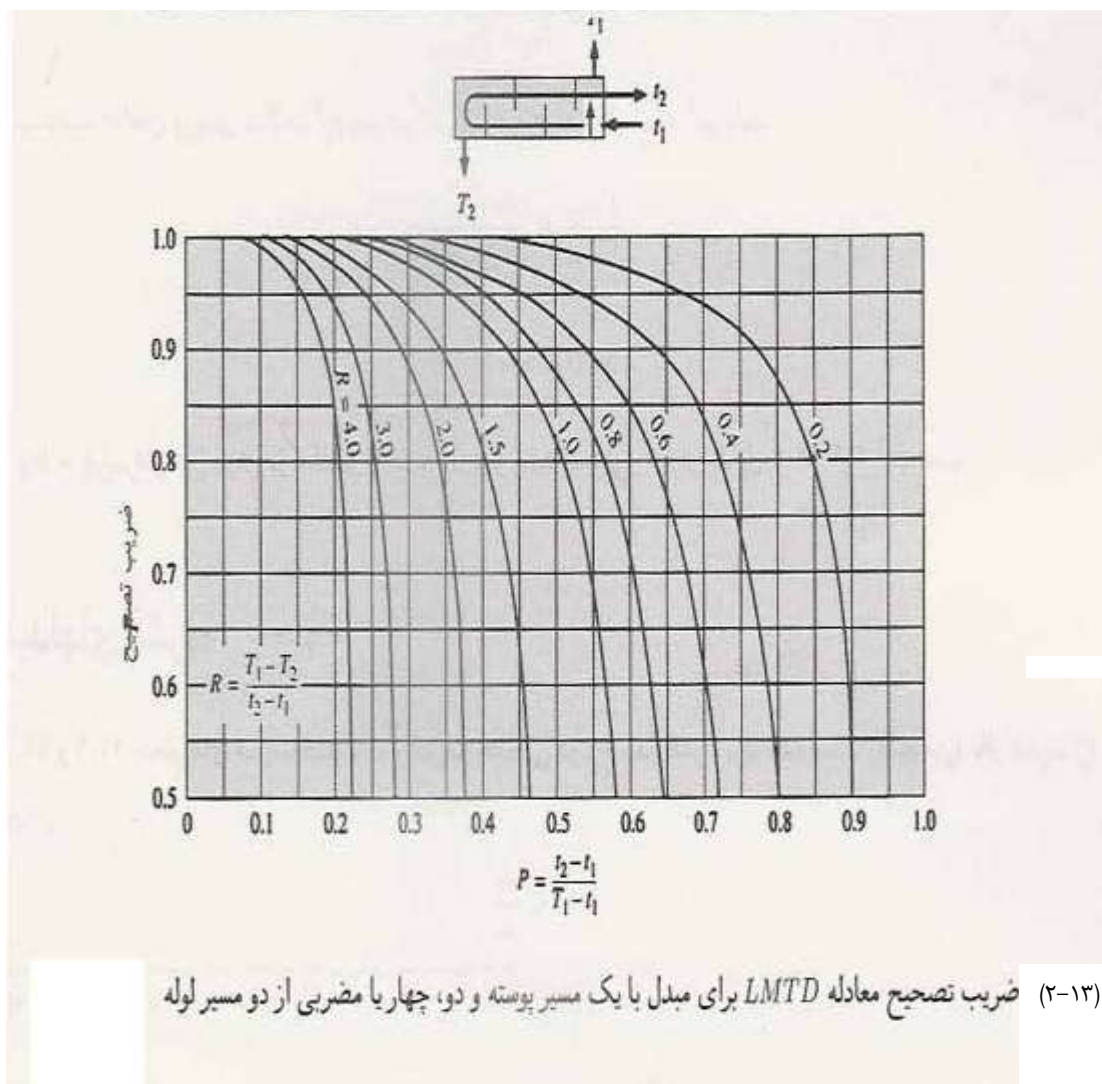
روش حاصلگیری برای دماهای سیستمهای چند بعدی (الف) صفحه نیمه بی نهایت، (ب) مکعب مستطیل بطول بی نهایت، (ج) میله نیمه بی نهایت یا مقطع مستطیل، (د) مکعب مستطیل، (ه) استوانه نیمه بی نهایت، (و) استوانه کوتاه

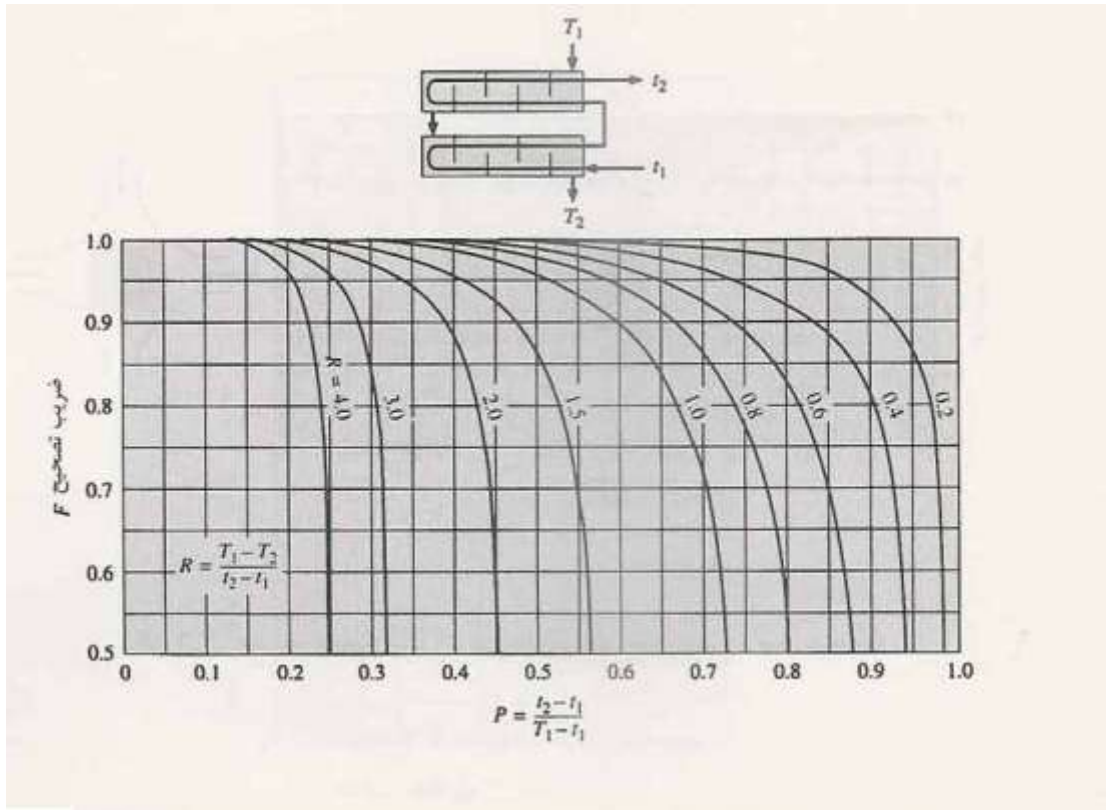
دمای T_0 قرار می گیرد: (الف) صفحه بی نهایت به ضخامت $2L$ ، (ب) استوانه بطول بی نهایت و شعاع r_0 ، (ج) کره به شعاع r_0

نمودار (۱۲-۲) تفکیک سیستم های چند بعدی به چند سیستم یک بعدی

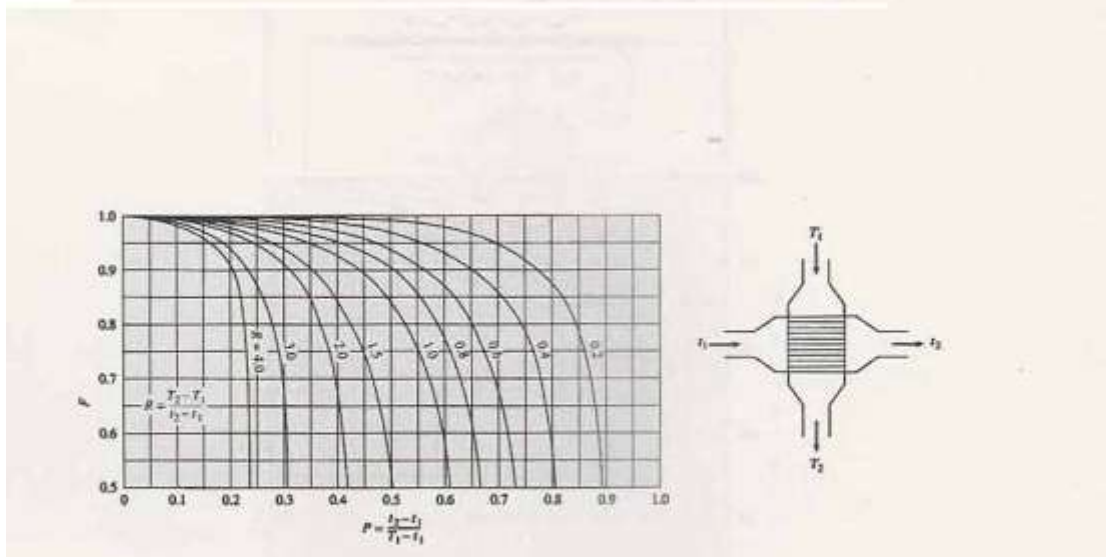
D_i/D_o	Nu_i	Nu_o	Comments
0	—	3.66	See Equation 8.55
0.05	17.46	4.06	
0.10	11.56	4.11	
0.25	7.37	4.23	
0.50	5.74	4.43	
≈ 1.00	4.86	4.86	See Table 8.1, $b/a \rightarrow \infty$

جدول (۲-۱) عدد ناسلت برای جریان آرام کاملاً توسعه یافته در یک مجرای حلقوی

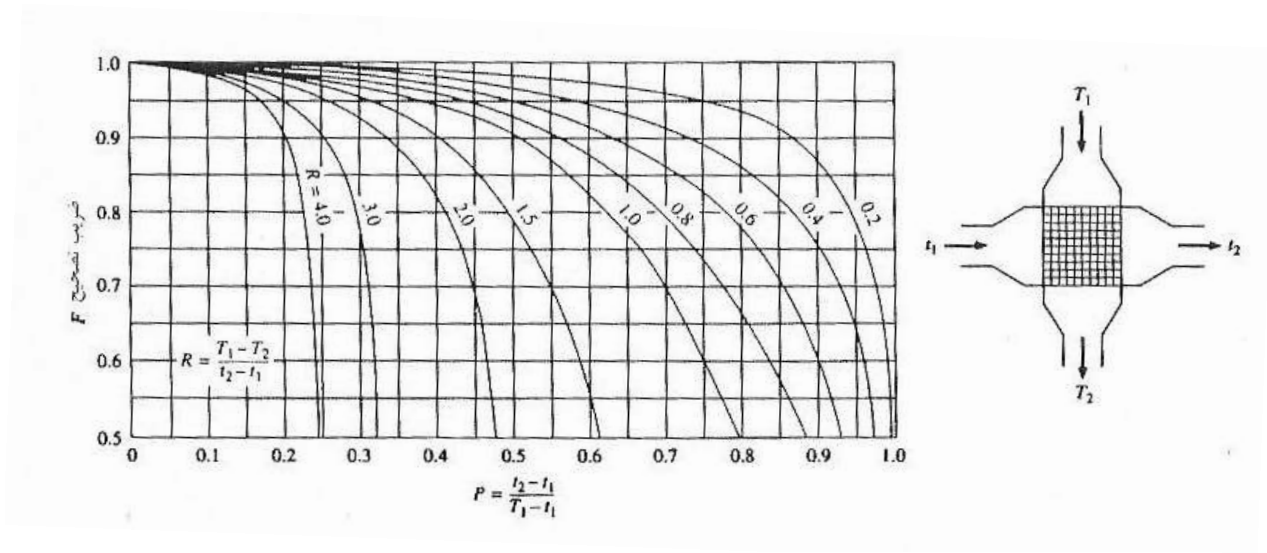




نمودار (۲-۱۴) تصحیح معادله $LMTD$ برای مبدل با دو مسیر پوسته و چهار یا مضربی از چهار مسیر لوله



نمودار (۲-۱۵) ضریب تصحیح مبدل جریان متقاطع تک مسیره با یک سیال که هر دو سیال غیر مخلوط اند



نمودار (۲-۱۶) ضریب تصحیح مبدل جریان متقاطع تک مسیره که یکی از سیال ها مخلوط و دیگری غیر مخلوط

- 1- Holman J.p Heat Transfer
- 2- Introduction to Heat Transfer F.P INCROPERA , D.P DEWITT
- 3- Chapman J.A Heat Transfer 2nd The macmillan
- 4- Kern D.Q process Heat Transfer
- 5- Ozisik M.N Heat Transfer A Basic Approach
- 6- Cengel , yunns A Heat Transfer A practical approach

۷- دکتر سید حسین نوعی باغبان و دکتر محمد خشنودی انتقال حرارت ، اصول و کاربرد

۸- دکتر محمد چالکش امیری اصول انتقال حرارت