

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

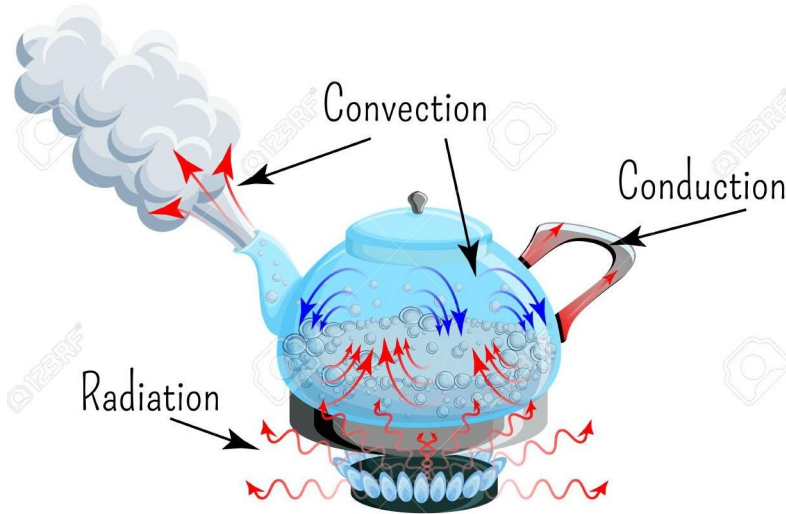


انتقال حرارت ۱

مدرس:

نوروزی

مرجع: انتقال حرارت - نویسنده: جک فیلیپ هولمن



بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایا

فصل سوم: انتقال حرارت هدایتی چند بعدی پایا

فصل چهارم: انتقال حرارت هدایتی ناپایا

فصل پنجم: اصول انتقال حرارت جابجایی (جریان خارجی)

فصل ششم: اصول انتقال حرارت جابجایی (جریان داخلی)

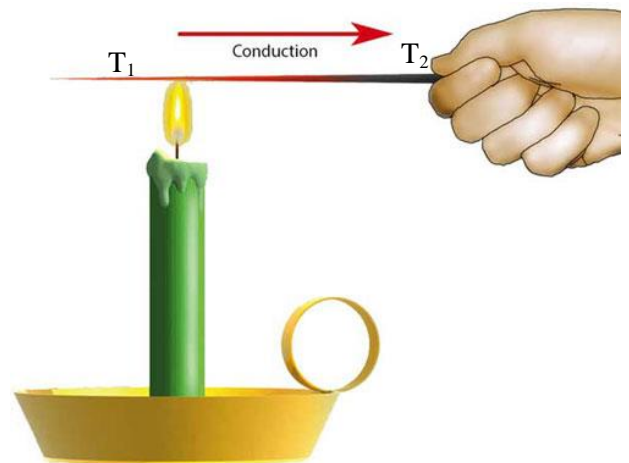
فصل اول: مقدمه

- انتقال حرارت: موضوع درس انتقال حرارت عبارت است از مطالعه‌ی نحوه و میزان انتقال یک نوع خاصی از انرژی (انرژی حرارتی یا گرمایی)

- سه طریق (Mode) انتقال حرارت: به طور کلی حرارت به سه صورت منتقل می شود:

۱ - انتقال حرارت هدایتی یا رسانایی (Conduction Heat Transfer) :

این نوع انتقال حرارت در جامدات و نیز در مایعات و گازها در صورتی که ساکن باشند رخ می دهد.

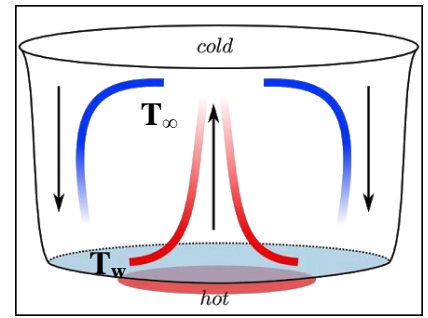


$$T_1 > T_2 \quad , \quad q = -kA \frac{\Delta T}{\Delta L} \quad , \quad \frac{q}{A} \propto \frac{\partial T}{\partial x}$$

۲ - انتقال حرارت جابجایی یا همرفتی (Convection Heat Transfer) :

انتقال حرارت از (به) یک سطح توسط یک سیال (مایع یا گاز) است.

$$T_w > T_\infty \quad q = hA (T_w - T_\infty)$$



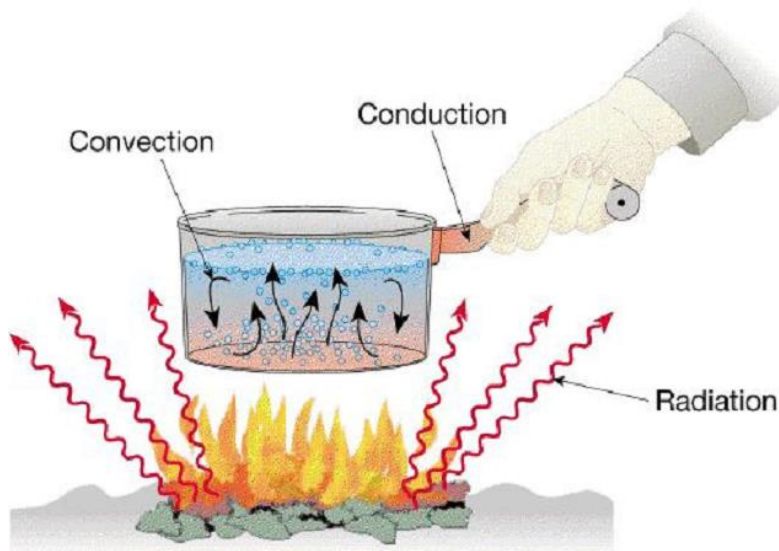
وقتی یک صفحه‌ی داغ فلزی در مقابل یک فن قرار بگیرد، سریع‌تر از زمانی سرد می‌شود که در مجاورت هوای ساکن قرار گیرد. در این صورت می‌گوییم که حرارت جا به جا شده است.

۳ - انتقال حرارت به صورت تابشی یا تشعشعی (Radiation Heat Transfer) :

تنها شکل انتقال حرارت است که برای نشر و انتقال به محیط مادی نیاز ندارد.

$$q = \sigma AT^4$$

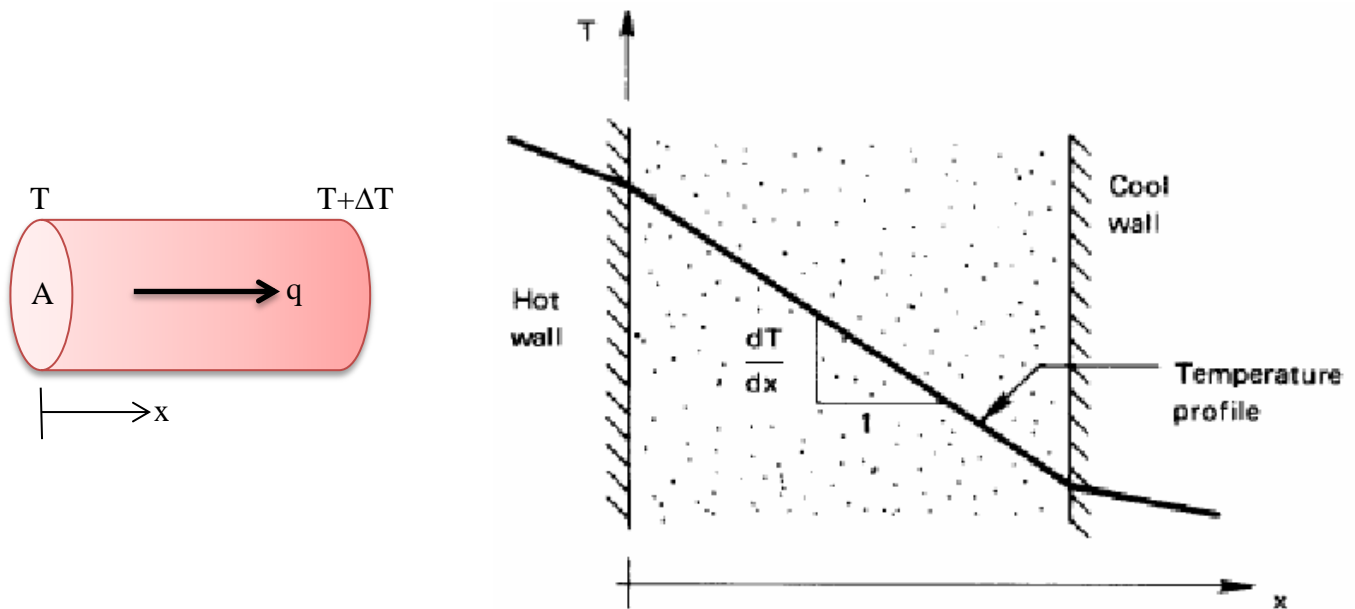
مکانیزم این انتقال حرارت تشعشع الکترومغناطیسی است.



روش های مختلف انتقال حرارت

سیستم حرارتی (یک بعدی) :

انتقال حرارت هدایتی یا به عبارتی دیگر حرارت منتقل شده در واحد زمان از طریق هدایت q_x در جهت x



انتقال حرارت از دیواره

$$q_x \propto A, \Delta T, \frac{1}{\Delta x}, \quad q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \text{Fourier's law}$$

k : ضریب تناسب به نام ضریب هدایت حرارتی جسم (ضریب انتقال حرارت از طریق هدایت برای جسم یا محیط مورد نظر) (Thermal Conductivity)

A : سطحی که از ورای آن انتقال حرارت صورت می‌گیرد.

x : امتداد مورد نظر

$\frac{\partial T}{\partial x}$: گرادیان دما در امتداد x (به این دلیل است که دما در حالت کلی در جهات دیگر نیز می‌تواند تغییر کند).

- جهت رعایت اصل دوم ترمودینامیک است. زیرا انرژی همیشه از منبع گرم به سرد منتقل می‌شود.

ΔT منفی است پس باید در یک منفی ضرب شود.

k یکی از خصوصیات فیزیکی محیط با اجسام است مانند چگالی، ضریب حرارتی، ویسکوزیته و ...

$$k \text{ تابعی از دما است و واحد آن: } \text{SI: } \frac{\text{J}}{\text{s.m. K} \text{ or } ^\circ\text{C}}, \quad \text{British: } \frac{\text{Btu}}{\text{hr.ft. } ^\circ\text{F} \text{ or } \text{R}}$$

تابعیت k از دما معمولاً به صورت خطی است. $k = aT + b$

ولی در یک محدوده‌ی دمای پایین می‌توان آن را ثابت (مقدار متوسط) در نظر گرفت.

k برای فلزات زیاد و برای عایق‌ها (پلاستیک‌ها) بسیار کم است. یعنی در عایق حرارت خوب منتقل نمی‌شود.

k فلزات و بسیاری از اجسام در سه جهت یکسان و مساوی است، ولی اجسامی وجود دارند که خصوصیات فیزیکی آن‌ها از جمله k در سه جهت یکسان نیست. مثل گرافیت؛ زیرا ساختار لایه لایه دارد.

پلیمر هایی ساخته شده که خصوصیت آن ها در یک جهت با جهات دیگر کاملا متفاوت است. در جدول زیر ضریب هدایت حرارتی برخی مواد ذکر شده است.

Silver	: 410	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	Copper	: 380	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	Aluminium	: 202	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$
Iron	: 79	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	Lead (Plumb)	: 35	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	S. Steel	: 14	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$
Wood	: 0.1	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	Water	: 0.56	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$	Air	: 0.024	$\frac{j}{s. m. ^\circ C}$

نظریات موجود در مورد نحوه ی انتقال حرارت هدایتی در جامدات :

۱ - نظریه نوسانات مولکولی (ارتعاشات شبکه ای) : به عبارتی هر مولکول یا اتم انرژی جنبشی (حرارتی) خود را به مولکول همسایه منتقل می کند.

۲ - نظریه ی الکترون های آزاد : تجربه نشان داده که تمام اجسامی که رسانایی الکتریکی خوبی دارند (فلزات) رسانایی حرارتی خوبی هم دارند. در این نظریه الکترون های آزاد نقش انتقال حرارت را به عهده دارند. به این ترتیب که برای اجسام مختلف نسبت رسانایی الکتریکی به رسانایی حرارتی را محاسبه کردند و مشاهده کردند که تقریبا برای اکثر مواد (به جز موارد استثنا) مقدار تقریبا ثابتی است. به عبارتی هادی های خوب حرارتی مثل مس، آلومینیوم و آهن، هادی های خوب الکتریکی هم هستند. پس بهتر است به جای آهن و آلومینیوم در " در و پنجره " از PVC استفاده کنیم.

در مایعات و گازها هنگامی که ساکن (محبوس) باشند، نحوه ی انتقال حرارت به صورت هدایت است.

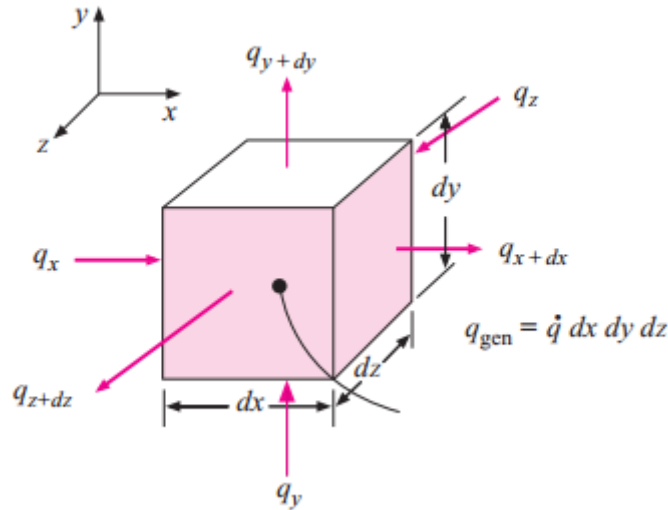
هدایت حرارتی در جامدات به آسانی صورت می گیرد ولی در مایعات و گازها خیلی کم رنگ است. لایه ی هوای حبس شده یکی از بهترین عایق - هاست. در گازها و مایعات چون معمولا حرکت دارند، انتقال حرارت به صورت جابجایی (همرفت) است.

معادلات کلی انتقال حرارت هدایتی :

یک المان مکعبی از یک جسم جامد را در سه بعد در نظر بگیرید (مختصات کارترین)

انرژی حرارتی تولید شده در واحد حجم : \dot{Q}

مثلا توسط برق عبورکننده از جسم رسانا، انرژی حرارتی تولید می شود.



المان حجم برای تحلیل انتقال حرارت هدایت سه بعدی در مختصات کارتزین

موازنه انرژی :

انرژی حرارتی ورودی به المان + انرژی حرارتی تولید شده در المان = انرژی حرارتی خروجی از المان + تجمع انرژی حرارتی در المان

Accumulation

Output

Generation

Input

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{q}(dx dy dz) - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \frac{dE}{dt} = \rho(dx dy dz) C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

افزایش انرژی در المان خود را به صورت افزایش دما نشان می‌دهد. $(\frac{dE}{dt} = m C_p \Delta T)$ $(m = \rho dx dy dz)$

- برای تغییرات دمای متداول ρ و C_p ثابت بوده و مقادیر متوسط آنها در معادله وجود دارد و نسبت به زمان تغییر نمی‌کند.

$$q_x = -k \underbrace{A}_{dy dz} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \rightarrow q_{x+dx} = -k(dy dz) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx}$$

$$\rightarrow q_{x+dx} = -k(dy dz) \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right]$$

$$\rightarrow q_{x+dx} = \underbrace{-k(dy dz) \frac{\partial T}{\partial x}}_{q_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[-k(dy dz) \frac{\partial T}{\partial x} \right]}_{dq_x} dx$$

$$\rightarrow q_{x+dx} = q_x + dq_x$$

(k در تمام جهات یکی است)

$$q_y = -k(dx dz) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_{y+dy} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx dz$$

$$q_z = -k(dy dx) \frac{\partial T}{\partial z}, \quad q_{z+dz} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx dy$$

موازنه انرژی :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی در ۳ بعد در مختصات کارتزین با فرض اینکه k در سه بعد یکسان باشد :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \text{ضریب نفوذپذیری حرارتی} \end{array} = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \right) \quad \alpha \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

در k ثابت، اجسامی که ρ یا C_p کمتری دارند، نفوذ پذیری حرارتی در آن‌ها بیشتر است. یعنی زودتر به حالت Steady State (پایا) می‌رسند.

حالات ساده معادله کلی انتقال حرارت هدایتی :

۱ - انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایا، بدون منبع انرژی در داخل جسم

$$\dot{q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

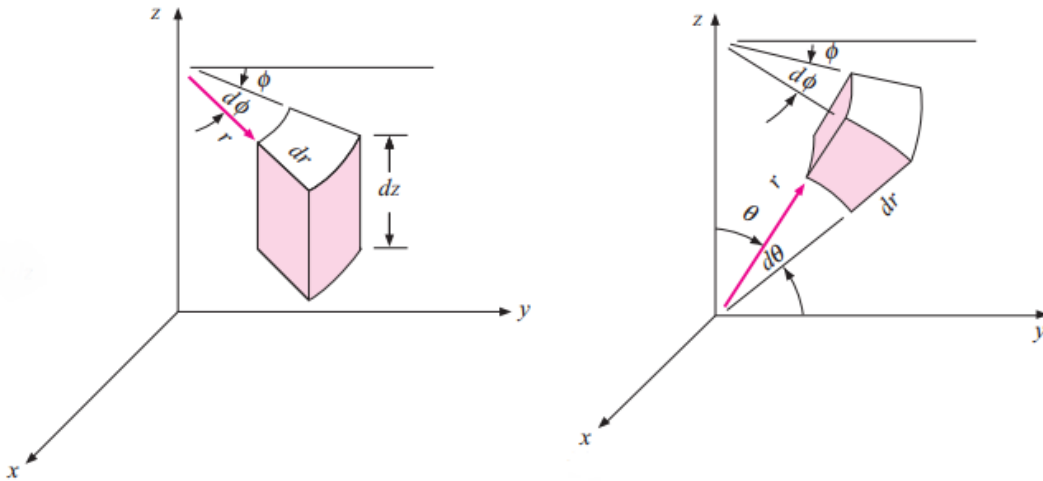
۲ - انتقال حرارت هدایتی ۲ بعدی پایا، بدون منبع انرژی در داخل جسم

$$\dot{q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

۳ - انتقال حرارت هدایتی ۱ بعدی ناپایا ، بدون منبع انرژی در داخل جسم

$$\dot{q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

معادلات کلی انتقال حرارت در سه بعد در مختصات استوانه‌ای و کروی:



مختصات استوانه ای : (r, z, φ)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

مختصات کروی:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\dot{q}}{k} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایا

$$s.s \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = cte$$

یعنی تغییرات دما بر حسب x خطی است. $T = ax + b$

$$\rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

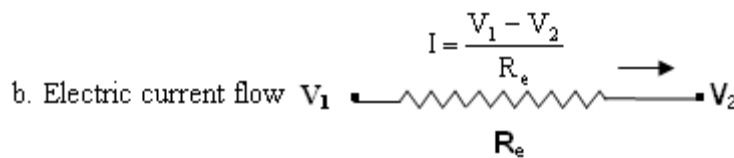
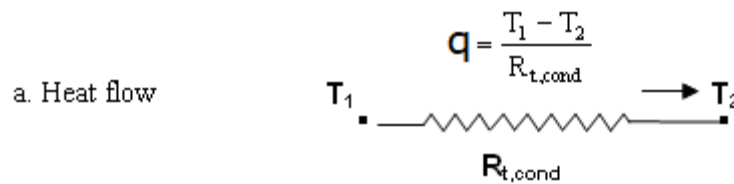
از طرفی طبق رابطه ی فوریه $q = -kA \frac{dT}{dx} \leftarrow \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{q}{kA}$ همیشه مقداری ثابت است.
ثابت ثابت

$$q = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{-(T_2 - T_1)}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

ضخامت دیواره

Thermal Resistance : مقاومت هدایتی حرارتی $R_{th} = \frac{\overbrace{\Delta x}}{k \underbrace{A}_{\substack{\text{سطح} \\ \text{انتقال} \\ \text{حرارت}}}}$

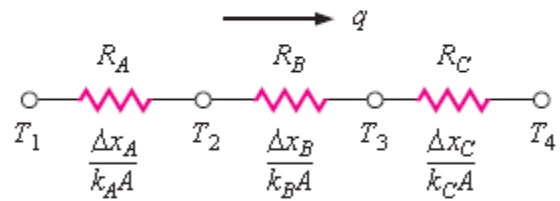
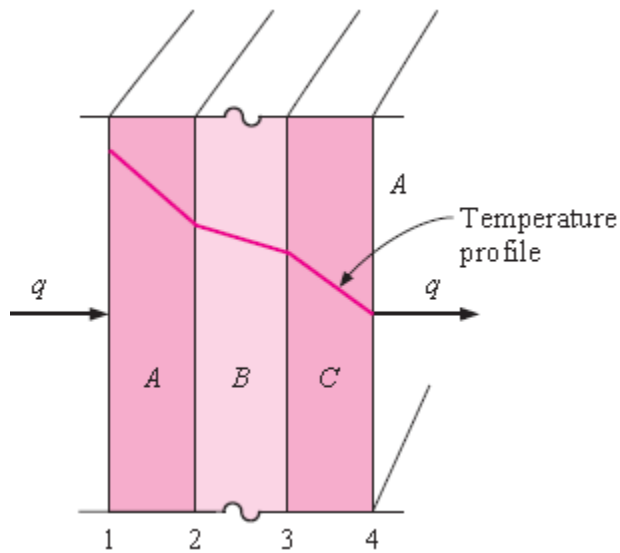
قانون اهم برای سیستم الکتریکی : $I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R}$, $R = \underbrace{\rho_0}_{\substack{\text{مقاومت} \\ \text{ویژه}}} \cdot \frac{\overbrace{\Delta l}}{\underbrace{A}_{\substack{\text{سطح} \\ \text{سیم}}}}$



q در انتقال حرارت مشابه جریان (I) در الکتریسیته است.

• انتقال حرارت هدایتی یک بعدی پایا در یک دیواره ی چند لایه :

یک دیوار چند لایه را در نظر بگیرید که هر لایه یک k مخصوص به خود دارد ، چون در داخل دیوار ، تجمع حرارتی نداریم ، بنابراین ، در حالت پایا ، حرارت منتقل شده از وجه ۱ به وجه ۴ ثابت است.



$$q = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_A}{k_A A}} \quad (1)$$

$$= \frac{T_2 - T_3}{\frac{\Delta x_B}{k_B A}} \quad (2)$$

$$= \frac{T_3 - T_4}{\frac{\Delta x_C}{k_C A}} \quad (3)$$

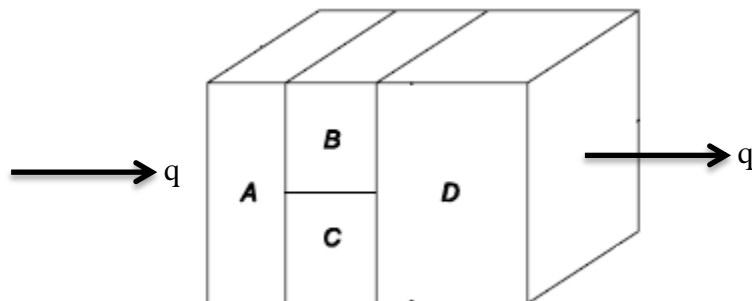
$$= \frac{T_1 - T_4}{\frac{\Delta x_A}{k_A A} + \frac{\Delta x_B}{k_B A} + \frac{\Delta x_C}{k_C A}} = \frac{\Delta T_{tot}}{\sum R_{Th}} \quad (4)$$

یک قاعده ریاضی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

$\sum R_{Th}$: مجموع مقاومت هایی که در سر راه این دو دما که به صورت سری قرار گرفته اند. به عبارتی معادل مقاومت کل در الکتریسیته است.

اگر بخواهیم اتلاف حرارتی دیوار را کاهش دهیم در صورتی که T_1 و T_4 ثابت باشد، باید دیوارها را ضخیم تر نمود. و یا اینکه از عایق مناسب تر با k کمتر استفاده کنیم. در حالت کلی q که از دیوار می‌گذرد با هم برابر است، ولی تغییرات دما در هر ۳ دیوار متفاوت است؛ با اینکه تغییرات دما خطی است.

مثال : مقاومت حرارتی معادل در دیواره ی مرکب زیر را محاسبه نمایید.



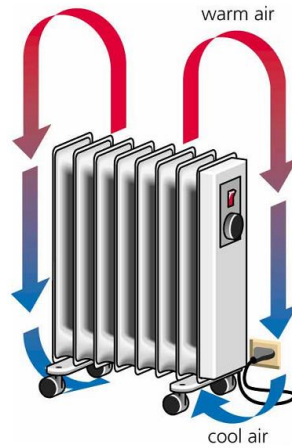
• مقدمه‌ای بر انتقال حرارت به صورت جابجایی (Convection Heat Transfer) :

انتقال به صورت جابجایی، انتقال حرارت از (به) یک سطح، توسط یک سیال (گاز یا مایع) است و خود بر ۲ نوع است:

۱- جابجایی آزاد یا طبیعی (Free or Natural convection) :

که در آن سیال بدون استفاده از هیچ گونه وسیله مکانیکی و فقط به دلیل اختلاف چگالی و سبک شدن جریان می یابد. (مثل گرم شدن هوای اتاق توسط رادیاتور)

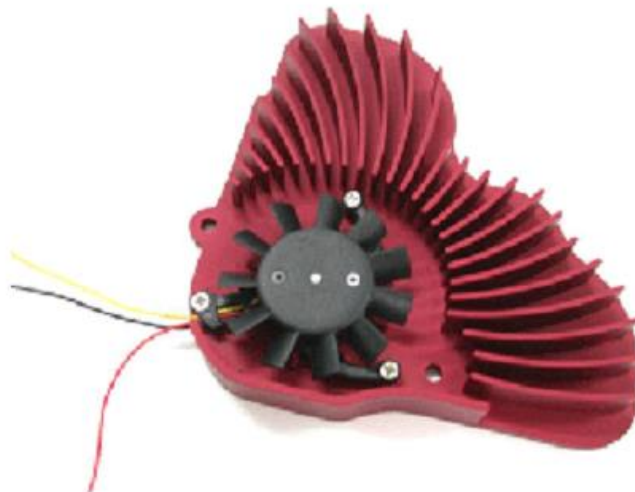
اختلاف فشاری که باعث حرکت سیال می شود : $\Delta P = (\rho_{\text{cold}} - \rho_{\text{hot}}) g \cdot h$



گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جابجایی آزاد)

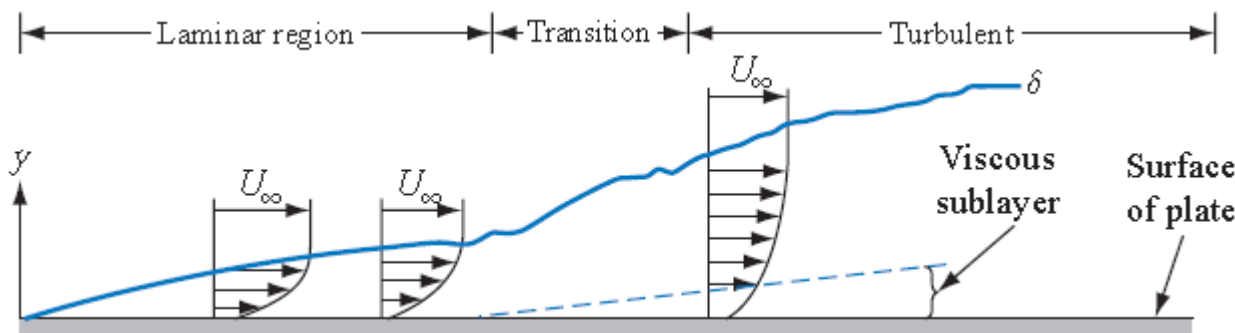
۲- جابجایی اجباری (Forced Convection) :

اگر سیال مورد استفاده در جابجایی با یک وسیله‌ی مکانیکی دمیده شود، آن را جابجایی اجباری گویند. (مثل فن کویل)



خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)

راندمان انتقال حرارت در جابجایی اجباری < راندمان انتقال حرارت در جابجایی آزاد



لایه‌ی چسبیده به سطح آن قدر نازک است که پیدا کردن تغییرات دما مشکل است. سیال به صورت مجموعه‌ای از مولکول‌ها حرکت می‌کند، به دلیل پیوند مولکولی. پس حرکت مولکول‌ها تلاطم ایجاد می‌کند. انتقال حرارت کلی بین سیال و صفحه جابجایی است ولی ریشه انتقال حرارت در جابجایی، هدایت است. در بالای زیر لایه، هم‌بسته‌ها نقش انتقال حرارت را به عهده دارند. رابطه‌ی انتقال حرارت از طریق جابجایی، اولین بار توسط نیوتن به صورت زیر بیان شد :

$$q \propto A, \Delta T \rightarrow q = h \cdot A (T_w - T_{\infty}) \rightarrow q = \frac{T_w - T_{\infty}}{\frac{1}{hA}} = \frac{T_w - T_{\infty}}{R_{Th}}$$

Newton's cooling law
قانون سرمایش نیوتن

R_{Th} : مقاومت حرارتی جابجایی

q : میزان حرارت منتقل شده از جداره به سیال در واحد زمان

A : سطح انتقال حرارت (سطح تماس جداره و سیال)

T_w : دمای جداره

T_{∞} : دمای بالک سیال (دمای حجمی سیال)

h : ضریب تناسب ، ضریب انتقال حرارت از طریق جابجایی (آزاد یا اجباری) بین جداره و سیال $\frac{w}{m^2 \cdot ^\circ C} = \frac{j}{s \cdot m^2 \cdot ^\circ C}$

ضریب h تابع موارد زیر است :

• (۱) خواص فیزیکی سیال (چگالی، گرمای ویژه و نیز ضریب هدایت حرارتی سیال k و ...)

h مایعات معمولاً بیشتر از گازهاست. زیرا تجمع مولکول‌ها در مایعات بیشتر از گازهاست. پس راحت‌تر و سریعتر حرارت را منتقل می‌کند.

(۲) خواص دینامیکی سیال (ویسکوزیته، سرعت سیال و ...)

هر چه سرعت سیال بیشتر باشد، h بیشتر است. به عبارتی h برای جابجایی اجباری $>$ جابجایی طبیعی

h به صورت تجربی تعیین می‌شود و در فصول ۵ و ۶ روابط تجربی مختلفی جهت محاسبه‌ی آن آمده است.

مثال : دیواری متشکل از سه لایه آجر ، سیمان و گچ ، اتاقی را از محیط بیرون جدا می‌کند. دمای محیط بیرون $-5^\circ C$ و دمای اتاق $20^\circ C$ می‌باشد. مطلوب است میزان حرارت انتقال یافته از ورای واحد سطح دیوار به شرطی که ضخامت لایه‌های مختلف به شرح زیر باشد.

$$\Delta x(\text{آجر}) = 15 \text{ cm} \quad k(\text{آجر}) = 0.69 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$$

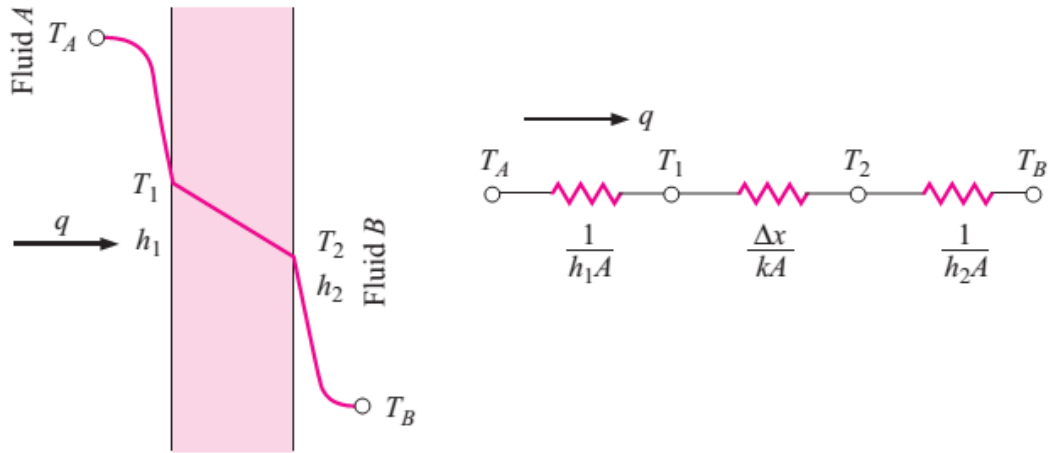
$$\Delta x(\text{سیمان}) = 5 \text{ cm} \quad k(\text{سیمان}) = 0.29 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\Delta x(\text{گچ}) = 2 \text{ cm} \quad k(\text{گچ}) = 0.48 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\text{داخلی } h_i = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \quad \text{اتاق } T_i = 20^\circ\text{C}$$

$$\text{خارجی } h_o = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \quad \text{بیرون } T_c = -5^\circ\text{C}$$

.....



برای سیستم هایی که تلفیقی از هدایت و جابجایی هستند، q را می توان به صورت زیر نوشت :

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{h_i A} + \sum \frac{\Delta x_j}{k_j A} + \frac{1}{h_o A}} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum \frac{\Delta x_j}{k_j} + \frac{1}{h_o}} \cdot A(T_i - T_o) \quad (*)$$

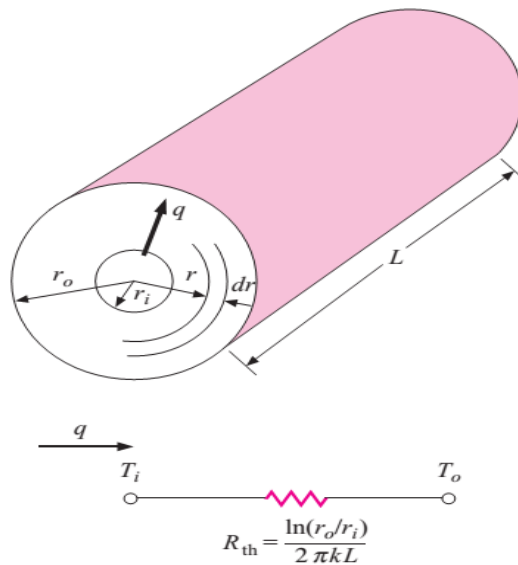
$$q = U \cdot A(T_i - T_o) \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum \frac{\Delta x_j}{k_j} + \frac{1}{h_o}}$$

U : ضریب کلی انتقال حرارت و واحد آن همان واحد h است. (Overall Heat Transfer Coefficient)

انتقال حرارت هدایتی پایا در جهت شعاع در یک استوانه با طول L (تعیین پروفیل دما) :

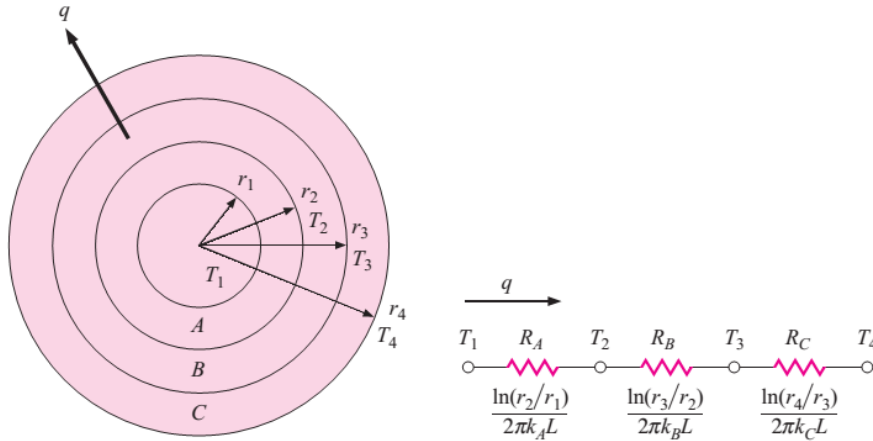
یک استوانه‌ی تو خالی طویل با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o را در نظر بگیرید :



فوریه $q_r = -k \frac{A_r}{\text{سطح جانبی استوانه}} \frac{dT}{dr} = -k (2\pi rL) \frac{dT}{dr}$ s.s : $q_r = \text{cte} \rightarrow \frac{q_r}{2\pi rL} \cdot \frac{dr}{r} = -dT$

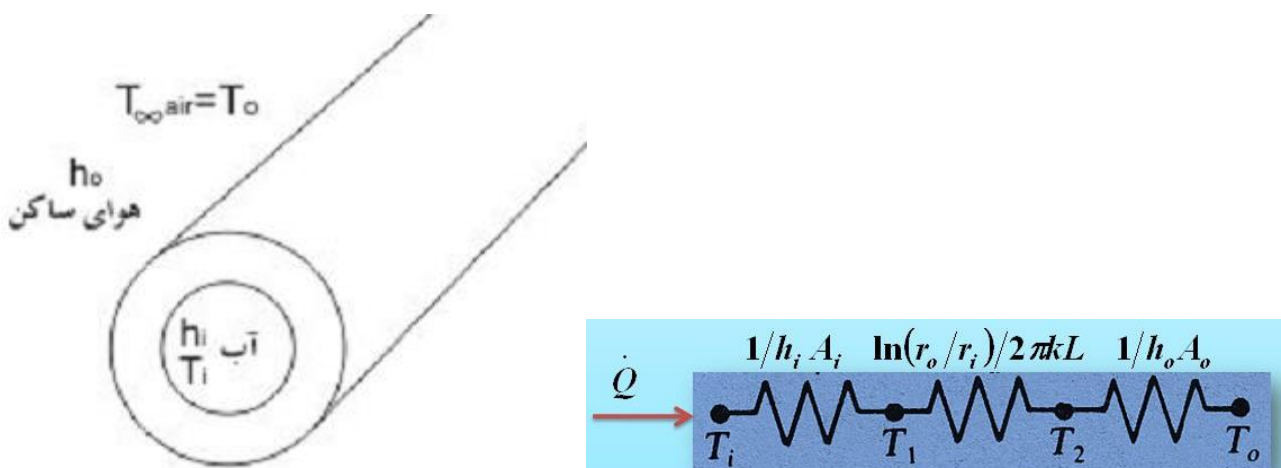
$$\rightarrow \frac{q_r}{2\pi rL} \cdot \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = - \int_{T_i}^{T_o} dT \quad \rightarrow \quad q = \frac{T_i - T_o}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi kL}} = \frac{T_i - T_o}{R_{th}}, \quad R_{th} = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi kL}$$

تعمیم برای چند لایه ی تو در تو :



$$q = \frac{T_1 - T_n}{\sum R_{th}} = \frac{T_1 - T_n}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_2 L} + \dots + \frac{\ln \frac{r_n}{r_{n-1}}}{2\pi k_{n-1} L}}$$

• اتلاف حرارت کلی در یک لوله :



انتقال حرارت در یک لوله استوانه ای

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o}} \stackrel{\times A_i}{\cong} \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \frac{A_i}{h_o A_i}} \cdot A_i (T_i - T_o)$$

$$= U_i \cdot A_i (T_i - T_o) \quad = U_o \cdot A_o (T_i - T_o)$$

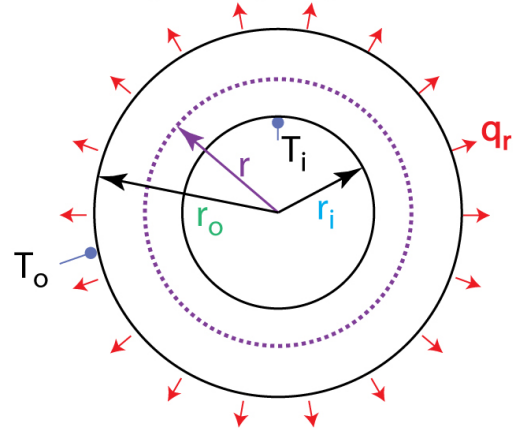
U_i : ضریب کلی انتقال حرارت بر مبنای سطح داخلی

U_o : ضریب کلی انتقال حرارت بر مبنای سطح خارجی

$$U_i \cdot A_i = U_o \cdot A_o \rightarrow U_i = U_o \cdot \frac{A_o}{A_i} \rightarrow U_i \neq U_o$$

انتقال حرارت پایا به صورت هدایت در جهت شعاع در یک کره:

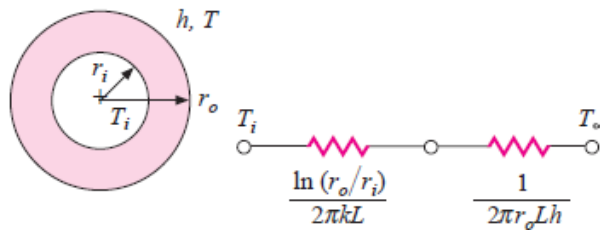
$$q \text{ یک بعدی} = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot 4\pi k$$



• ضخامت (شعاع) بحرانی عایق (Critical Thickness of insulation):

عایق ها، k کمی دارند. بنابراین مقاومتشان در برابر انتقال حرارت $(R_{th} = \frac{\Delta x}{kA})$ زیاد است.

طبق تعریف لوله ای را در نظر می گیریم که روی آن عایق است.



T_i : دما در سطح داخلی عایق

T_∞ : دمای محیط یا سیال اطراف عایق

T_w : دما در سطح بیرونی عایق

$$q = \frac{T_i - T_w}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi kL}} = h \cdot A (T_w - T_\infty) = \frac{(T_w - T_\infty)}{\frac{1}{hA}} = \frac{(T_i - T_\infty)}{\sum R_{th}} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi kL} + \frac{1}{h(2\pi r_o L)}}$$

$$\text{اتلاف حرارتی بر واحد طول} : \frac{q}{L} = \frac{2\pi(T_i - T_\infty)}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{k} + \frac{1}{h \cdot r_o}}$$

ظاهرا با افزایش ضخامت عایق ، باید کاهش انتقال (افت) حرارت داشته باشیم، ولی اینطور نیست. افزایش ضخامت عایق ۲ اثر مخالف دارد :

+ افزایش ضخامت باعث افزایش مقاومت هدایتی شده و انتقال حرارت کمتر می شود.

- افزایش ضخامت باعث افزایش سطح خارجی عایق شده و طبق رابطه ی $q = hA (T_w - T_\infty)$ ، انتقال حرارت بیشتر می شود.

در چه مقداری از r_o ، q_{max} یا q_{min} را داریم؟

$$\frac{d(q/L)}{dr_o} = 0 \Rightarrow \frac{-2\pi(T_i - T_\infty) \left(\frac{-h}{r_o^2 h^2} + \frac{1/r_i}{r_o/h} \cdot \frac{1}{k} \right)}{\left(\frac{\ln r_o/r_i}{k} + \frac{1}{h \cdot r_o} \right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{r_o \cdot k} - \frac{1}{r_o^2 h} = 0 \rightarrow r_o = r_c = \frac{k}{h}$$

ضخامت یا شعاع بحرانی عایق

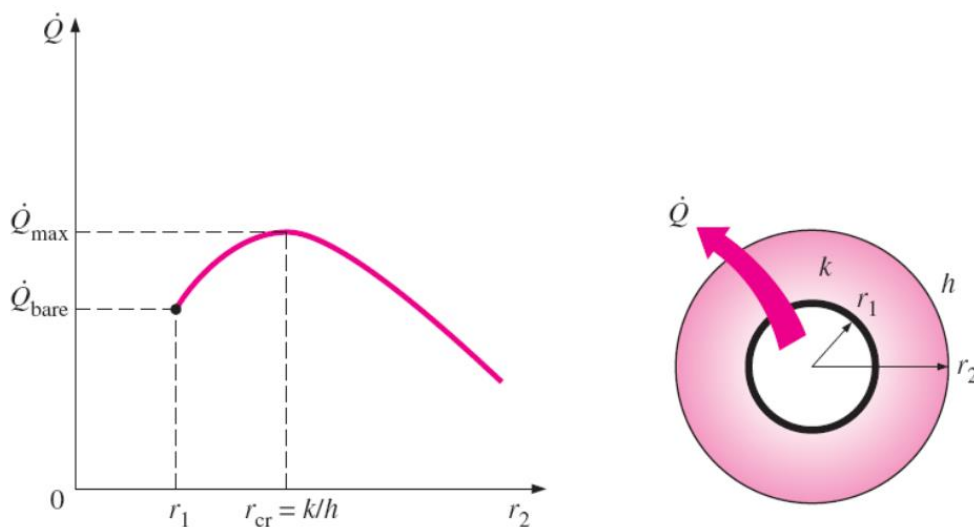
برای این که بدانیم این شعاع بحرانی Max است یا Min ، باید مشتق دوم بگیریم :

$$\frac{d^2(q/L)}{dr_o^2} \Big|_{r_o=r_c} = 0 \Rightarrow -2\pi(T_i - T_\infty) \frac{\left(\frac{k}{h \cdot r_o} + \ln \frac{r_o}{r_i} \right) \left(\frac{2k}{r_o h} - 1 \right) - 2 \left(1 - \frac{k}{hr_o} \right)^2}{\frac{1}{r_o h} \left(\frac{k}{h} + n \ln \frac{r_o}{r_i} \right)^3} \Big|_{r=r_c}$$

$$= - \frac{2\pi(T_i - T_\infty) \frac{\overbrace{h^2}^{>0}}{k}}{\underbrace{\left(1 + \ln \frac{r_o}{r_i} \right)^2}_{>0}} < 0$$

این مقدار همیشه منفی است، پس مقدار q ، Max است و این بدترین حالت است. زیرا اتلاف حرارتی زیادی داریم.

ترسیم: مقادیر k و h را از جداول می خوانیم و مقدار r را به دست می آوریم. در حالتی که شعاع لوله از r_c کمتر باشد، با افزایش ضخامت عایق، تلفات حرارتی بیشتر خواهد شد. برای اینکه اتلاف حرارت کمتر باشد شعاع باید از r_c بیشتر باشد.



تغییرات انتقال حرارت بر حسب شعاع عایق

عمدتاً هدف از نصب عایق، کاهش افت حرارتی است، ولی یک مورد استثنا هم داریم؛ و آن در سیم برق است. در سیم برق لایه‌ی لاستیک روی آن طوری باید باشد که شعاع آن روی q_{max} تنظیم شود. زیرا اگر حرارت بالا رود و دفع نشود، سیم ذوب می‌شود. پس سیم باید طوری باشد که بیشترین اتلاف حرارتی را داشته باشد.

$$r_c = \frac{2k}{h} \text{ ضخامت شعاع بحرانی کره}$$

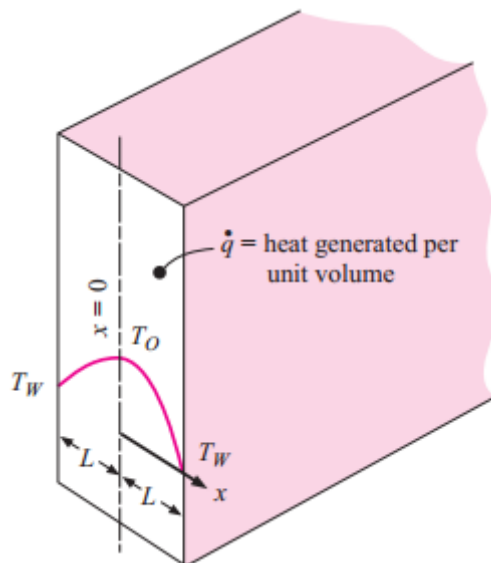
مثال : آب در دمای 50°C درون لوله‌ای به قطر 2.5 cm جریان دارد به طوری که ضریب انتقال حرارت جابجایی $3500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$ است. لوله دارای ضخامت 0.8 mm است و ضریب هدایت حرارتی آن $16 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$ است. در بیرون لوله حرارت به واسطه‌ی جابجایی آزاد با مقدار ضریب جابجایی $h_0 = 7.6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$ تلف می‌شود. ضریب کلی انتقال حرارت و افت حرارت در واحد طول به محیط بیرون با دمای 20°C را محاسبه کنید.

مثال : شعاع بحرانی عایق برای آزبست که در معرض هوای اتاق در دمای 20°C با ضریب جابجایی $3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$ قرار دارد را محاسبه کنید؟ افت حرارت از لوله‌ای به قطر 5 cm در دمای 200°C هنگامی که توسط عایق با شعاع بحرانی پوشیده شده و در حالتی که بدون عایق است را محاسبه کنید.

• توزیع دمای پایا به صورت هدایت در داخل دیواره، همراه با یک منبع حرارتی

از داخل دیوار برق عبور میکند و در داخل آن حرارت تولید می‌شود. \dot{q}

X بسیار ناچیز است.



$$s.s \rightarrow \frac{dT}{dt} = 0$$

- جسم همگن است؛ یعنی در سه امتداد تقارن فیزیکی داریم و حرارت نیز با شدت \dot{q} در این سیستم تولید می‌شود.

- امتداد Y و Z بسیار زیاد است. پس فقط در جهت X هدایت حرارتی داریم.

- انتقال حرارت پایا است. یعنی هیچ پارامتری نسبت به زمان تغییر نمی‌کند. در نتیجه تمام انرژی تولید شده در جسم از ۲ سطح جانبی خارج می‌شود و دما در وسط دیواره از همه جا بالاتر است. (T_0)

- در وسط حرارت تولید می‌شود و از دو طرف خارج می‌شود.

- نمودار دما در دیواره قرینه است اما خطی نیست.

- مبدأ را در وسط دیواره اختیار می کنیم.

تغییرات دما: نوشتن موازنه ی انرژی در حالت پایا بر روی المان:

انرژی حرارتی خارج شده از المان از سمت راست = انرژی حرارتی تولید شده در المان + انرژی حرارتی وارده به المان از سمت چپ

$$q_x + \dot{q}(A dx) = q_{x+dx}$$

$$-kA \frac{dT}{dx} \Big|_x + \dot{q}(A dx) = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + \frac{d}{dx} \left(-kA \frac{dT}{dx} \right) dx$$

$$\dot{q} = -k \frac{d^2 T}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k}$$

$$\int \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} x + c_1 \rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + c_1 x + c_2$$

برای پیدا کردن c_1 و c_2 در صورتی که مبدا مختصات در سمت چپ و گوشه باشد:

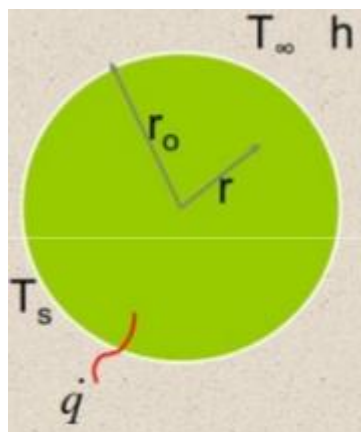
$$B.C : \begin{cases} x=0 \rightarrow T=T_w \\ x=2L \rightarrow T=T_w \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = T_w \\ c_1 = \frac{\dot{q}L}{k} \end{cases} \quad T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + \frac{\dot{q}L}{k} x + T_w$$

شرایط مرزی در صورتی که مبدا مختصات وسط باشد:

$$B.C \begin{cases} x=0 \rightarrow \begin{cases} T=T_c \rightarrow c_2 = T_c \rightarrow T - T_c = -\dot{q} \frac{x^2}{2k} \quad (1) \\ \frac{dT}{dx} = 0 \xrightarrow{\text{تقارن}} c_1 = 0 \end{cases} \\ x = \pm L \rightarrow T = T_w \xrightarrow{(1)} T_w - T_c = -\dot{q} \frac{L^2}{2k} \quad (2) \end{cases}$$

$$\boxed{\xrightarrow{\text{تقسیم 1 به 2}} \frac{T - T_c}{T_w - T_c} = \left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

• توزیع دمای پایا به صورت هدایت در داخل استوانه ی توپر همراه با یک منبع حرارتی



یادآوری: در یک لوله تو خالی هنگامی که پوسته ی داخلی و خارجی غیرهم دما باشند، تغییرات دما در جهت r است.

- در یک میله هنگامی که دو سر میله غیر هم دما باشند، تغییرات دما در جهت Z است.

سوال : استوانه ای توپر را در نظر بگیرید که جریان برق از وسط آن عبور می کند. تغییرات در جهت r است. تغییرات دما را بیابید.

استفاده از معادله ی کلی در ۳ بعد و مختصات استوانه ای :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{k} r \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}}{k} r$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + c_1$$

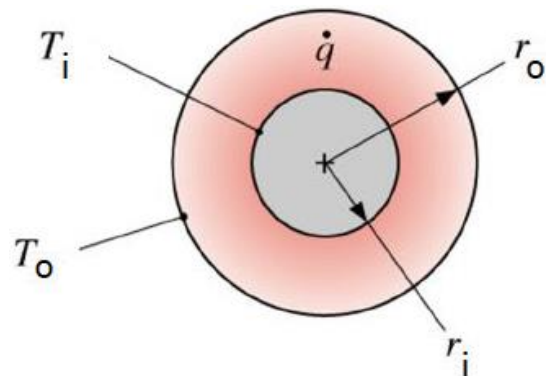
$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} T = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (I)$$

B.C :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad r = 0 \rightarrow \frac{dT}{dr} = 0 \quad (\text{تقارن}) \rightarrow c_1 = 0 \\ (2) \quad r = R \rightarrow T = T_w \rightarrow T_w = -\frac{\dot{q}}{4k} R^2 + c_2 \rightarrow c_2 = T_w + \frac{\dot{q}}{4k} R^2 \Rightarrow \\ \qquad \qquad \qquad T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k} (R^2 - r^2) \quad (A) \\ (3) \quad r = 0 \rightarrow T = T_c \rightarrow T_c - T_w = \frac{\dot{q}}{4k} R^2 \quad (A) \\ \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{\text{تقسیم (A) به (B)}} \frac{T - T_w}{T_c - T_w} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad \text{with : } T_c = \frac{\dot{q}}{4k} R^2 + T_w \\ (4) \quad \text{کل حرارت خروجی از سطح بیرونی استوانه} = \text{کل حرارت ایجاد شده در استوانه} \\ \qquad \qquad \qquad \dot{q}(\pi R^2 L) = -k(2\pi RL) \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} \quad \text{هدایت} \end{array} \right.$$

* اگر استوانه تو خالی هم باشد، حل مسئله تا معادله ی (1) هیچ فرقی نمی کند. تفاوت در شرایط مرزی ایجاد می شود.

$$B.C \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad r = r_i \rightarrow T = T_i \\ (2) \quad r = r_o \rightarrow T = T_o \end{array} \right.$$

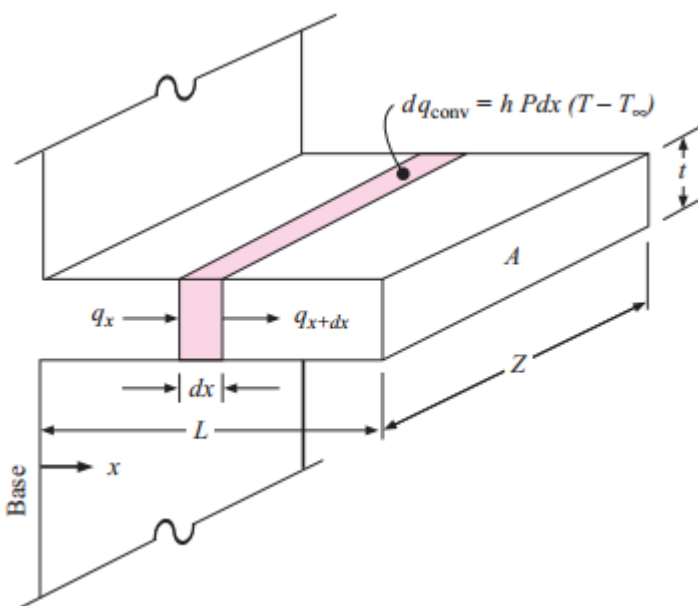


مثال : جریانی معادل 200 A از یک سیم ساخته شده از فولاد ضد زنگ با ضریب هدایت $19 \frac{W}{m^{\circ}C}$ به قطر 3 mm عبور می کند. مقاومت فولاد معادل $70 \mu\Omega cm$ و طول سیم یک متر است. سیم در یک مایع با درجه حرارت $110^{\circ}C$ قرار گرفته است و مقدار ضریب انتقال حرارت $4 \frac{KW}{m^2^{\circ}C}$ است. درجه حرارت مرکز سیم را به دست آورید.

• سیستم‌های هدایتی و جابجایی (سیستم تلفیقی):

در عمل، سیستم‌های جابجایی و هدایتی با یکدیگر وجود دارند و در بعضی حالات به همراه فرم دیگر انتقال حرارت (تشنع) همراه هستند. در انتقال حرارت هر چه سطح انتقال حرارت بیشتر شود، میزان انتقال حرارت بیشتر می‌شود. فرض کنید صفحه‌ای با سطح محدود داریم و برای اینکه انتقال حرارت را افزایش دهیم، باید یک زائده یا یک صفحه‌ی دیگر به آن بچسبانیم. زائده باعث تخلیه‌ی بهتر حرارت می‌شود.

تعیین پروفیل (تغییرات دما) در یک پره : مسئله‌ی انتقال حرارت یک بعدی پایا بدون منبع داخلی انرژی :



سطح هاشور خورده = q_{conv}

انرژی که از سطح جانبی المان + انرژی حرارتی خروجی از = انرژی حرارتی ورودی به المان
 به محیط جا به جا می شود سمت راست المان به صورت هدایت از سمت چپ به صورت هدایت

$$q_x = q_{x+dx} + q_{conv} \Rightarrow -kA \frac{dT}{dx} \Big|_x = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + h \cdot A' (T - T_\infty)$$

($A' =$ سطحی که از آن جابجایی صورت می گیرد = سطح تماس سیال با المان پره = سطح تر شده‌ی المان توسط سیال)

($A = zt$ سطح هدایت است.)

$$-kA \frac{dT}{dx} \Big|_x = -kA \frac{dT}{dx} - kA \frac{d^2T}{dx^2} \cdot dx + h(p \cdot dx)(T - T_\infty)$$

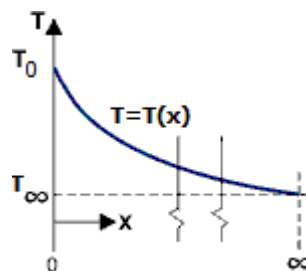
$$-kA \frac{d^2T}{dx^2} dx + hp \cdot dx (T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hp}{kA} (T - T_\infty) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر } (T - T_\infty = \theta)} \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hp}{kA} \theta = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ثابت } T_\infty \\ d\theta = dT \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \left\{ \begin{array}{l} \theta = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx} \\ m = \sqrt{\frac{hp}{kA}} \end{array} \right.$$

ثابت های C_1 و C_2 از شرایط مرزی به دست می آیند و بر حسب اینکه شرایط مرزی چه باشند، مقادیر آنها متفاوت است و می توان سه حالت مختلف را در نظر گرفت:

* (1) حالت اول: وقتی طول پره بسیار زیاد است: دمای انتهایی پره با دمای سیال برابر است.



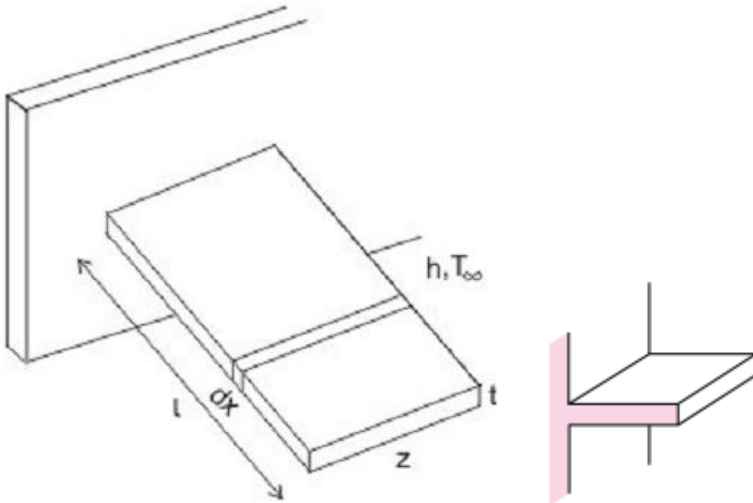
$$\text{شرایط مرزی} \left\{ \begin{array}{l} \text{at } x = \infty \xrightarrow{(T=T_\infty)} \theta = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ \text{at } x = 0 \rightarrow T = T_0 \rightarrow (\theta = T - T_\infty), T_0 - T_\infty = \theta_0 \rightarrow c_1 = \theta_0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \quad (1)$$

بنابراین کل حرارت تخلیه شده (جابجایی) از پره با طول بی نهایت خواهد شد :

$$q = \int_0^L dq = \int_0^L h \cdot p (T - T_\infty) \cdot dx$$

از طرفی این مقدار حرارت همان حرارت ورودی به پره در $x = 0$ است.



$$q = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad \theta = \theta_0 e^{-mx}$$

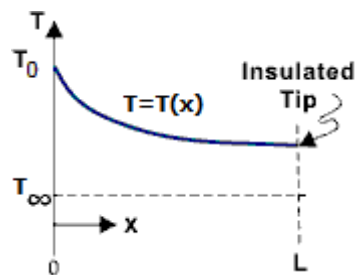
$$\frac{d\theta}{dx} = -m\theta_0 e^{-mx} \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = -m\theta_0 e^{-m(0)} = -m\theta_0$$

$$(q_{Fin} = kAm\theta_0, \quad m = \sqrt{\frac{h \cdot p}{kA}}) \quad \text{or}$$

$$\text{حرارت ورودی به پره} \Rightarrow q = \sqrt{hpkA} (T_0 - T_\infty) \quad (2)$$

در صورتی که ضریب انتقال حرارت جابجایی، در طول پره تغییر کند (زیرا T تغییر می کند)، یعنی h تابعی از دما باشد، باید در این معادله \bar{h} را قرار دهیم.

* (۲) حالت دوم: وقتی طول پره، محدود و ثابت باشد و انتهای آن نیز عایق باشد.



$$\Rightarrow -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

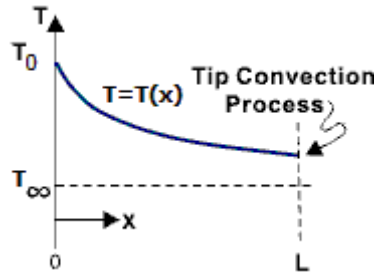
هدایت در انتها صفر است.

$$BC : \left\{ \begin{array}{l} \text{at } x = 0, \quad \theta = \theta_0 \\ \text{at } x = L, \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = \theta_0 \\ m(-c_1 e^{-ml} + c_2 e^{ml}) = 0 \end{array} \right\} \text{ دو معادله، دو مجهول}$$

$$c_1 = \theta_0 \left(1 - \frac{1}{1 + e^{2ml}}\right), c_2 = \frac{\theta_0}{1 + e^{2ml}} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh [m(L-x)]}{\cosh (mL)}$$

$$q_{Fin} = \sqrt{h.p.kA} \underbrace{(T_0 - T_\infty)}_{\theta_0} \tanh (mL) \quad \text{محاسبه ی } q \text{ پره :}$$

* (۳) حالت سوم: وقتی طول پره محدود و ثابت باشد و در انتهای پره نیز جابه جایی وجود داشته باشد.



میزان حرارت مبادله شده با محیط در $x=L$ برابر میزان حرارت منتقله به صورت هدایت در $x=L$ است.

$$-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h.A (T_{x=L} - T_\infty)$$

$$\rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh m(L-x) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh m(L-x)}{\cosh (mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh (mL)}$$

$$q_{Fin} = \sqrt{h.p.kA} (T_0 - T_\infty) \frac{\sinh (mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh (mL)}{\cosh (mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh (mL)}$$

جهت فرار از این محاسبات کمیتی به نام راندمان (کارایی یا بازده) پره ها را تعریف می کنند.

• راندمان پره :

راندمان پره ها به این صورت تعریف می شود :

$$\frac{\text{کار فعلی یا حرارتی که پره انتقال می دهد (تخلیه می کند)}}{\text{حداکثر حرارتی که پره در حالت ایده آل می تواند انتقال دهد}} = \frac{q_{\text{فعلی}}}{q_{\text{max}}} = \eta_{Fin}$$

q_{max} : حداکثر حرارت تخلیه شده از پره هنگامی است که تمام نقاط آن، هم دمای پایه ی آن باشد. (ایده آل) و آن هنگامی است که پره، هیچ مقاومتی از خود نشان ندهد. (در برابر انتقال حرارت).

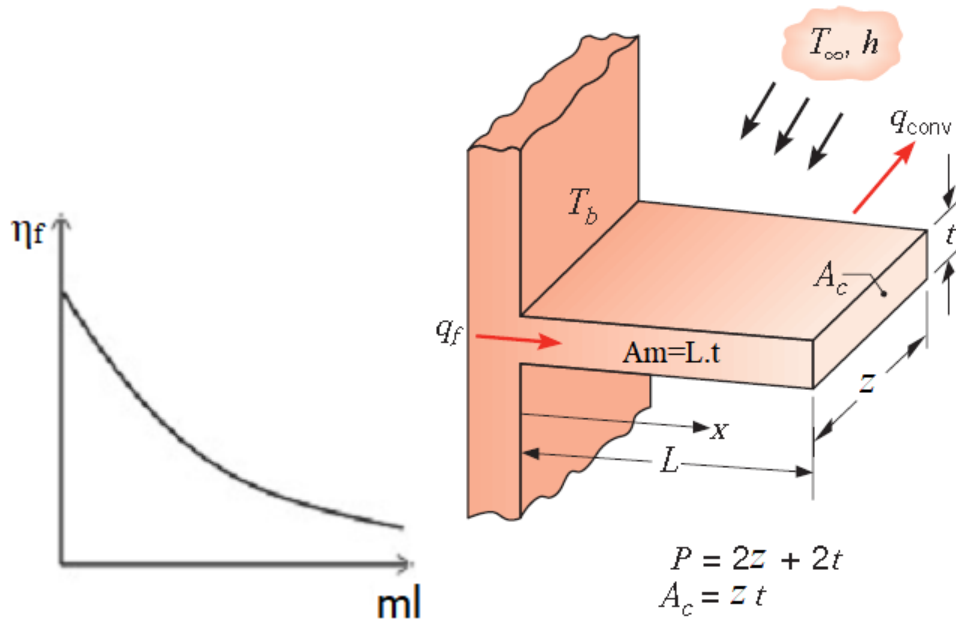
$$q_{max} = h.p.L \overbrace{(T_0 - T_\infty)}^{\text{حداکثر گرادیان حرارتی}} = h.p.L.\theta_0 \Rightarrow \eta_{Fin} = \frac{q_{\text{فعلی}}}{h.p.L.\theta_0}$$

بر حسب اینکه در کدام یک از حالات ۱ تا ۳ باشیم، $q_{\text{فعلی}}$ عوض خواهد شد.

حالت دوم: طول پره محدود و ثابت باشد و در انتهای آن عایق نصب باشد.

$$\eta_{(2)} = \frac{\sqrt{h \cdot p \cdot kA} \theta_0 \tanh mL}{hp L \theta_0} = \frac{\tanh h(mL)}{\sqrt{\frac{hp}{kA}} \cdot L} = \frac{\tanh h(mL)}{mL}$$

محاسبه ی mL :



$$mL = \sqrt{\frac{hp}{kA}} \cdot L = \sqrt{\frac{h \cdot (2z + 2t)}{k \cdot z \cdot t}} \cdot L \quad 0, t \ll z$$

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kt}} \cdot L = \sqrt{\frac{2h}{k \cdot L \cdot t}} \sqrt{L^3}, \quad A_m = Lt : \text{مساحت نیمرخ پره}$$

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{k \cdot A_m}} \cdot L^{\frac{3}{2}}$$

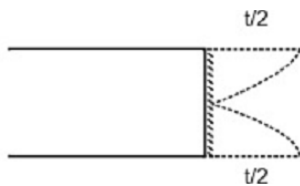
حالت اول: (طول پره بی نهایت)

برای این حالت نیز، معادله حالت دوم صادق است. زیرا در انتهای پره انتقال حرارت نداریم.

حالت سوم: (طول پره محدود و ثابت و در انتهای آن انتقال حرارت جابجایی)

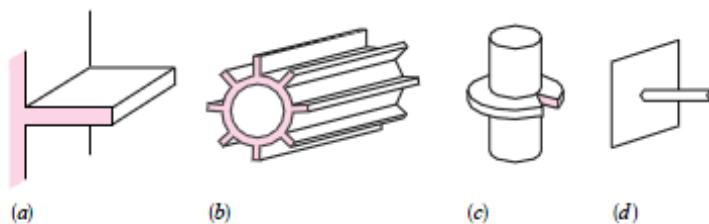
در مورد پره‌هایی با طول معین که انتهای آنها عایق نیست می‌توان از معادله‌ی فوق استفاده کرد، ولی هنگام استفاده از معادله (منحنی) باید از طول تصحیح شده (L_c) به جای L استفاده کرد. که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_c = L + \frac{t}{2}$$



$$L_c = L + \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = L + \frac{d}{4}$$

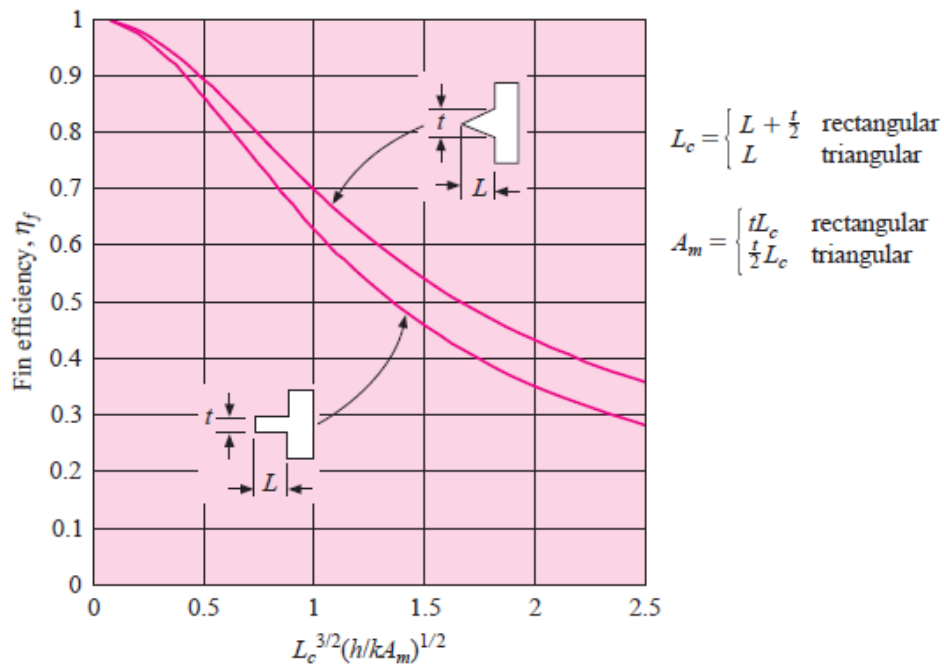
پره میله‌ای استوانه‌ای:



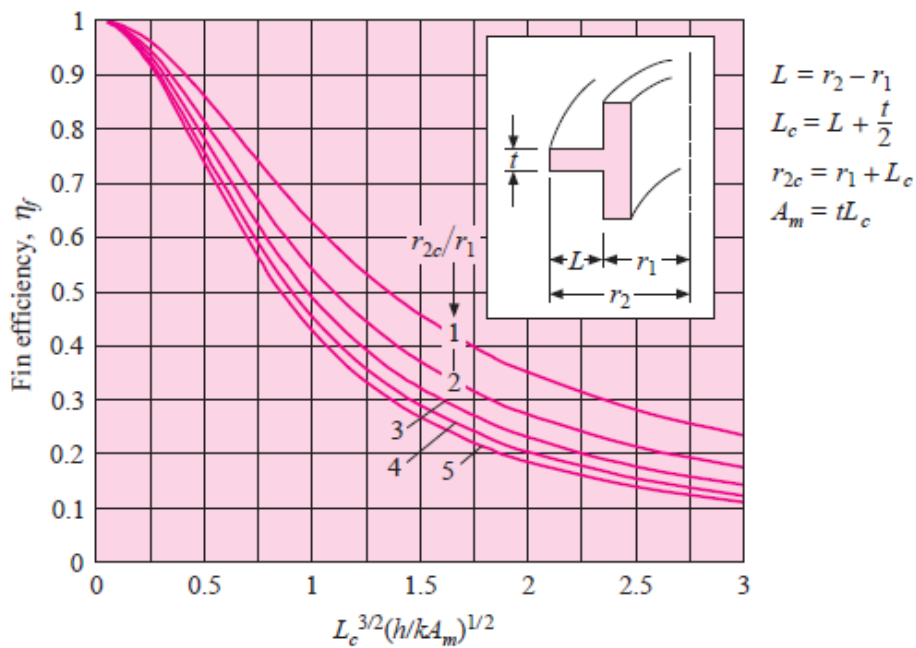
انواع مختلف از سطوح پره دار (الف) پره مستقیم با پروفیل مستطیلی بر روی یک دیواره (ب) پره مستقیم با پروفیل مستطیلی بر روی یک لوله با مقطع دایره (ج) میله استوانه‌ای با پره‌های شعاعی و پروفیل مستطیلی (د) پره با میله استوانه‌ای

نحوه‌ی محاسبات:

$$\left. \begin{array}{l} \text{نوع پره تعیین شود} \leftarrow \frac{A_m}{L_c} \leftarrow \text{تعیین} \leftarrow \text{از شکل مربوطه } \eta_{Fin} \text{ تعیین می شود.} \\ \text{فعال } q \text{ به دست می آید.} \end{array} \right\} q_{max} \text{ را داریم}$$



نمودار راندمان برای پره‌های مستقیم با پروفیل مستطیلی و مثلثی



نمودار راندمان برای پره‌های محیطی با پروفیل مستطیلی

فصل سوم: انتقال حرارت هدایتی چند بعدی پایا

معادله‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی چند بعدی : $\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$

معادله‌ی فوریه : $\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ اگر منبع حرارتی در داخل جسم نداشته باشیم

معادله‌ی پواسون $\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0$: اگر شرایط پایا باشد و دارای منبع حرارتی باشیم

معادله‌ی لاپلاس $\nabla^2 T = 0$: اگر شرایط پایا باشد و بدون منبع حرارتی

آن چیزی که در این فصل مد نظر است، انتقال حرارت پایا و بدون منبع حرارتی در داخل یک صفحه می‌باشد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \rightarrow T = T(x, y)$$

برای حل این معادله ۲ روش وجود دارد :

۱- روش تحلیلی (Analytical Method)

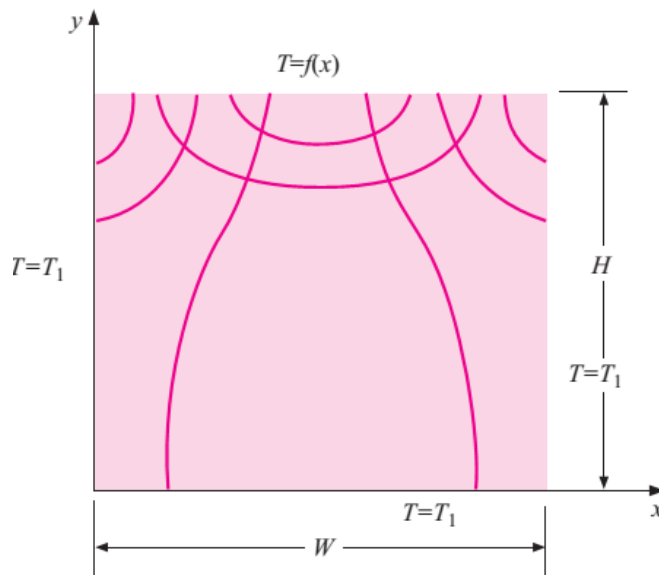
که در این روش معادله‌ی دیفرانسیل را به صورت تحلیلی حل نموده و ۱۰۰٪ دقیق است؛ ولی اگر معادله یا شرایط مرزی پیچیده باشد حل آن بسیار مشکل می‌شود. روش تحلیلی در بعضی مواقع جواب ندارد.

۲- روش عددی (Numerical Method) :

در این روش جسم را شبکه‌بندی نموده و معادله دیفرانسیل را به صورت عددی حل می‌کنیم؛ به عبارتی تابعیت را به صورت معادله به دست نمی‌آوریم، بلکه به صورت یک جدول (مقادیر عددی) به دست می‌آوریم. امروزه بیش از ۹۰٪ مسائل واقعی را با این روش حل می‌کنند.

▪ روش تحلیلی :

فرض کنید صفحه‌ای به ضخامت بسیار کم داریم که سه ضلع آن را در دمای ثابت قرار می‌دهیم.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

یکی از روش‌های تحلیلی برای حل این معادله، روش تفکیک متغیرهاست که جزئیات این روش در ریاضیات مهندسی آمده است. در این روش فرض می‌شود، تابع T ضربی از دو تابع مستقل $X(x)$ و $Y(y)$ باشد.

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{در معادله}} -\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{مقدار ثابت} = \lambda^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \begin{cases} X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \\ Y(y) = C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y} \end{cases}$$

جواب کلی : $T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y})$

B.C $\left\{ \begin{aligned} \text{at } x = 0 &\rightarrow T = 0 & (1) \end{aligned} \right.$

$\left\{ \begin{aligned} \text{at } x = L &\rightarrow T = 0 \rightarrow (B \sin \lambda L)(C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) = 0 & (2) \end{aligned} \right.$

$\left\{ \begin{aligned} \text{at } y = 0 &\rightarrow T = 0 \rightarrow (B \sin \lambda x)(C + D) = 0 \rightarrow C + D = 0 & (3) \end{aligned} \right.$

$$\left\{ \begin{aligned} (1) &\rightarrow A = 0 \\ (2) &\rightarrow \begin{cases} B \neq 0 \text{ چون تابع صفر می شود} \\ \sin \lambda L = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \\ n = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \\ (3) &\rightarrow C = -D \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow T = (B \sin \lambda x)(C e^{-\lambda y} - C e^{\lambda y})$$

$$T = (BC \sin \lambda x)(e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) \quad , \quad (e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) = -2 \sinh(\lambda y)$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{-2BC}_{C_n} \sin(\lambda x) \cdot \sinh(\lambda y) \quad , \quad \left(\lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots, \infty \right)$$

حل کلی مسئله : $T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L} \cdot y\right)$

$\left\{ \begin{aligned} \text{at } : y = b &\rightarrow T = T_m \sin \frac{\pi x}{L} & (4) \end{aligned} \right.$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \cdot \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi}{L} \cdot b\right)}_{\text{مقداری ثابت}} &= T_m \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right.$$

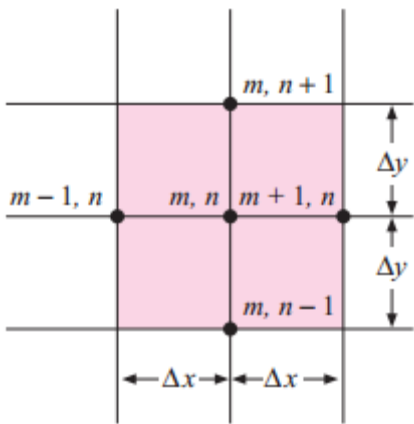
از خاصیت تعامد $\rightarrow c_n \left\{ \begin{aligned} C_n &= 0 \quad \forall n > 1 \quad \left(\sum \text{از بین می رود} \right) \\ C_1 &= \frac{T_m}{\sinh\left(\frac{\pi b}{L}\right)} \end{aligned} \right.$

$$\rightarrow T(x, y) = T_m \left(\frac{\sin h \left(\frac{\pi y}{L} \right)}{\sin h \left(\frac{\pi b}{L} \right)} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{پروفیل (توزیع) دما}$$

حل تحلیلی به این صورت، منجر به ایجاد سری می‌شود و همیشه جواب رندی نخواهیم داشت. بنابراین از روش عددی استفاده می‌کنیم که از نظر دقت بعد از روش تحلیلی است ولی به کامپیوتر نیاز دارد.

▪ روش عددی :

در این روش، صفحه‌ی مورد نظر، (و در حالت سه بعدی حجم مورد نظر) را به تعدادی شبکه‌ی کوچکتر تقسیم می‌کنیم. به این عمل شبکه‌بندی (مش‌بندی یا Meshing) گویند. در گره‌های مختلف، معادله‌ی انتقال حرارت را می‌نویسیم. از حل N معادله و N مجهول، دماهای نقاط مختلف را به دست می‌آوریم. هرچه تقسیم بندی بیشتر باشد، دقت محاسبات بیشتر است. جهت سهولت: $\Delta x = \Delta y$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

مشتق اول: $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m+\frac{1}{2}, n)} \cong \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-\frac{1}{2}, n} \cong \frac{T_{m, n} - T_{m-1, n}}{\Delta x}$$

مشتق دوم $\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{m, n} \cong \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+\frac{1}{2}, n} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-\frac{1}{2}, n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1, n} + T_{m-1, n} - 2T_{m, n}}{(\Delta x)^2}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}} &\cong \frac{T_{m, n+1} - T_{m, n}}{\Delta y} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m, n-\frac{1}{2}} &\cong \frac{T_{m, n} - T_{m, n-1}}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{m, n} \cong \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m, n-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$= \frac{T_{m, n+1} + T_{m, n-1} - 2T_{m, n}}{(\Delta y)^2}$$

با قرار دادن در معادله :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

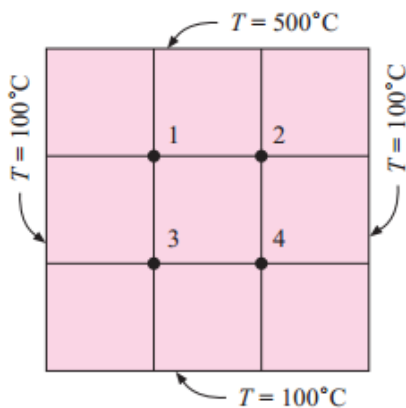
$$\rightarrow \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (\Delta x = \Delta y = 1)$$

$$\rightarrow T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

4 برابر دمای نقطه ی مورد نظر - مجموع دمای نقاط هم سایه ی نقطه ی مورد نظر

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$

مثال : در صفحه‌ای می‌خواهیم، دمای چهار گره میانی را پیدا کنیم



• روش‌های حل معادلات :

۱- روش تدریجی Relaxation Method :

مراحل این روش عبارتند از :

(۱) برای هر گره، دمایی حدس می زنیم. دمایی متناسب با وضعیت فیزیکی گره‌ها و نزدیک به واقع حدس زده شود.

(۲) برای هر گره، باقی مانده‌ها را بر اساس حدس ۱ محاسبه می کنیم و آن را q_i می نامیم.

(q_i : اختلاف دمای حدس زده شده و محاسبه شده)

(۳) بزرگترین باقی مانده از لحاظ قدر مطلق را انتخاب و دمای گره مربوط به آن را مجدداً حدس می زنیم.

به این ترتیب :

(بزرگترین باقی مانده با هر علامت) $\frac{1}{4}$ + حدس قدیم (دمای قبلی گره مورد نظر) = حدس جدید(دمای جدید)

(۴) محاسبه‌ی مجدد باقی مانده‌ها، با توجه به حدس جدید دمای گره مورد نظر.

(۵) تکرار مراحل ۳ و ۴، تا زمانی که بزرگترین باقی مانده از مقدار مورد نظر ما کمتر شود.

اگر حدس اولیه ما درست باشد، اختلاف‌ها ۰ خواهد شد.

انتخاب بزرگترین اختلاف و تصحیح دمای مربوطه (بقیه‌ی دماها را دست نمی‌زنیم و این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم تا جایی که برای همه‌ی

$$q_i \leq \pm 0.01 \text{ ها}$$

۲- روش حذفی گاوس (Gauss) در حل ماتریس‌ها یا روش قطری کردن ماتریس‌ها :

جهت سهولت فرض کنید می خواهیم یک ماتریس 3×3 را حل کنیم. یعنی سه معادله و سه مجهول داریم :

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3 = B_2 \quad (A_{ii} \neq 0)$$

$$A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3$$

باید ماتریس را به یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی تبدیل کنیم.

$$\text{تعریف : } m_2 = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

سطر اول را در m_2 ضرب و از سطر دوم کم می‌کنیم :

$$\underbrace{(A_{21} - m_2 A_{11})}_{A'_{21}=0} T_1 + \underbrace{(A_{22} - m_2 A_{12})}_{A'_{22}} T_2 + \underbrace{(A_{23} - m_2 A_{13})}_{A'_{23}} T_3 = \underbrace{B_2 - m_2 B_1}_{B'_2}$$

$$\text{ماتریس جدید : } \begin{cases} A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1 \\ 0 + A'_{22}T_2 + A'_{23}T_3 = B'_2 \\ A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3 \end{cases}$$

$$\text{تعریف : } m_3 = \frac{A_{31}}{A_{11}}$$

سطر اول را در m_3 ضرب و از سطر سوم کم می‌کنیم :

$$\underbrace{(A_{31} - m_3 A_{11})}_{A'_{31}=0} T_1 + \underbrace{(A_{32} - m_3 A_{12})}_{A'_{32}} T_2 + \underbrace{(A_{33} - m_3 A_{13})}_{A'_{33}} T_3 = \underbrace{B_3 - m_3 B_1}_{B'_3}$$

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$0 + A'_{22}T_2 + A'_{23}T_3 = B'_2$$

$$0 + A'_{32}T_2 + A'_{33}T_3 = B'_3$$

$$\text{تعریف : } m'_3 = \frac{A'_{32}}{A'_{22}}$$

m'_3 را در سطر دوم ضرب کرده و از سطر سوم کم میکنیم:

$$\underbrace{(A'_{32} - m'_3 A'_{22})}_{A''_{32}=0} T_2 + \underbrace{(A'_{33} - m'_3 A'_{23})}_{A''_{33}} T_3 = \underbrace{B'_3 - m'_3 B'_2}_{B''_3}$$

$$\text{معادلات جدید : } A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1 \rightarrow T_1 = \frac{B_1 - A_{12}T_2 - A_{13}T_3}{A_{11}}$$

$$0 + A'_{22}T_2 + A'_{23}T_3 = B'_2 \rightarrow T_2 = \frac{B'_2 - A'_{23}T_3}{A'_{22}}$$

$$0 + 0 + A''_{33}T_3 = B''_3 \rightarrow T_3 = \frac{B''_{33}}{A''_{33}}$$

فرم کلی :

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + \dots + A_{1j}T_j + \dots + A_{1N}T_N = B_1$$

$$A'_{22}T_2 + \dots + A'_{2j}T_j + \dots + A'_{2N}T_N = B'_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$A_{ij}^{i-1}T_j + \dots + A_{iN}^{i-1}T_N = B_i^{i-1}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$A_{NN}^{N-1}T_N = B_N^{N-1}$$

مثال : دماها در معادلات زیر را به روش فوق محاسبه نمایید.

$$2T_1 + 3T_2 + T_3 = 5$$

$$2T_1 - T_2 + 4T_3 = 3$$

$$T_1 + 4T_2 + 2T_3 = 6$$

۳- روش تکرار گاوس-سایدل (Gauss-Seidel)، در حل ماتریس ها :

جهت سهولت یک ماتریس 3×3 را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1 \\ A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3 = B_2 \\ A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3 \end{cases} \quad (A_{ii} \neq 0)$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{A_{11}}(B_1 - A_{12}T_2 - A_{13}T_3) & \text{(a)} \\ T_2 = \frac{1}{A_{22}}(B_2 - A_{21}T_1 - A_{23}T_3) & \text{(b)} \\ T_3 = \frac{1}{A_{33}}(B_3 - A_{31}T_1 - A_{32}T_2) & \text{(c)} \end{cases}$$

روش حل :

۱- مقادیر اولیه برای T_3, T_2, T_1 حدس می زنیم و آن ها را T_3^0, T_2^0, T_1^0 می نامیم. (حدس اول معمولاً ۰ است).

۲- با استفاده از T_3^0, T_2^0 ، از معادله ی a ، مقدار T_1^1 را به دست می آوریم.

۳- با استفاده از T_3^0, T_1^1 ، از معادله ی b ، مقدار T_2^1 را به دست می آوریم.

۴- با استفاده از T_1^1, T_2^1 ، از معادله ی c ، مقدار T_3^1 را به دست می آوریم.

۵- با استفاده از T_3^1, T_2^1 ، از معادله ی a ، مقدار T_1^2 را به دست می آوریم و به همین ترتیب تکرار محاسبات.

توان نشان دهنده ی تکرار عمل محاسبات است.

معادلات کلی : شرط توقف برنامه :

$$\begin{cases} T_1^k = \frac{1}{A_{11}} [B_1 - A_{12}T_2^{k-1} - A_{13}T_3^{k-1}] \\ T_2^k = \frac{1}{A_{22}} [B_2 - A_{21}T_1^k - A_{23}T_3^{k-1}] \\ T_3^k = \frac{1}{A_{33}} [B_3 - A_{31}T_1^k - A_{32}T_2^k] \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} \text{(یعنی } T_i \text{ در تکرار } k \text{ ام)} \\ \left| \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{T_i^{k-1}} \right| < \varepsilon = 10^{-6} \\ \left| \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{T_i^{k-1}} \right| < \varepsilon \end{matrix}$$

مثال : دستگاه معادلات زیر را به روش فوق حل کنید.

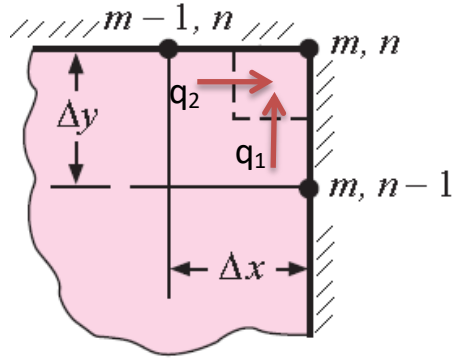
$$\begin{aligned}
5T_1 + T_2 + 2T_3 &= 32 & T_1 &= \frac{1}{5}(32 - T_2 - 2T_3) \\
2T_1 + 8T_2 + T_3 &= 29 & T_2 &= \frac{1}{8}(29 - 2T_1 - T_3) \\
T_1 + 2T_2 + 4T_3 &= 28 & T_3 &= \frac{1}{4}(28 - T_1 - 2T_2)
\end{aligned}$$

.....

خلاصه : معادله‌ی $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ را برای یک گره در داخل یک صفحه نوشته و سپس روش‌های عددی مختلف جهت حل معادله و تعیین دمای گره بیان کردیم. این معادله از موازنه‌ی انرژی به دست آمد. حال ببینیم اگر این گره در وسط صفحه نباشد، معادله به چه صورتی درمی‌آید. برای این کار باید برای گره مورد نظر موازنه‌ی انرژی را نوشت.

در حالت پایا مجموع حرارت ورودی به گره مورد نظر $\sum q_i = 0$

معادله‌ی گره در گوشه‌ی خارجی صفحه‌ای به عمق واحد که از اطراف عایق شده، قرار داشته باشد.



$$q_1 = k \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} = -k \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

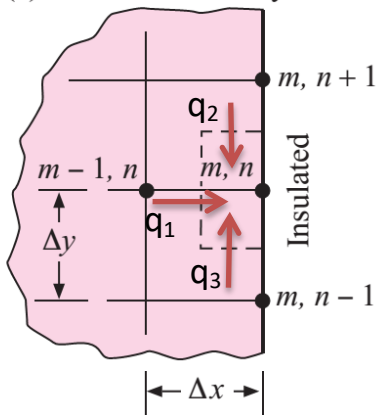
$$q_2 = k \left(\frac{\Delta y}{2} \times 1 \right) \left(\frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \right)$$

$$\sum q_i = 0 \rightarrow q_1 + q_2 = 0 \xrightarrow{1-\Delta x=\Delta y} \frac{k}{2} (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + \frac{k}{2} (T_{m-1,n} - T_{m,n}) = 0$$

$$T_{m,n-1} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n} = 0 \rightarrow T_{m,n} = \frac{T_{m,n-1} + T_{m-1,n}}{2}$$

معادله‌ی گره هنگامی که گره در وسط یک وجه صفحه‌ی عایق شده قرار داشته باشد:

(e) Insulated boundary



$$0 = T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n}$$

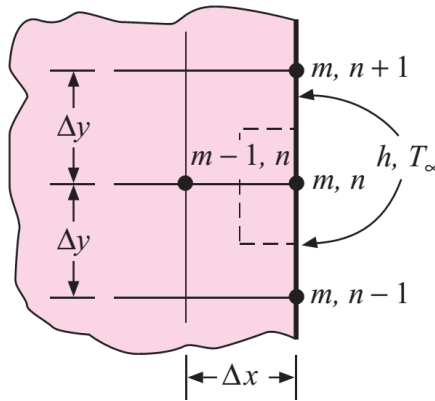
$$T_{m,n} = (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n})/4$$

$$q_1 = k(\Delta y \times 1) \left(\frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta x} \right), \quad q_2 = k \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) \left(\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \right)$$

$$q_3 = k \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) \left(\frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \right)$$

$$\sum q = 0 \rightarrow 2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

معادله‌ی گره هنگامی که در وسط یک وجه صفحه بوده و صفحه با محیط، جابجایی حرارت کند.



$$q_4 = h(\Delta y \times 1)(T_\infty - T_{m,n})$$

$$\sum q_i = 0 \xrightarrow{\Delta x = \Delta y}$$

$$\underbrace{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}_{q_1} + \underbrace{\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{2}}_{q_2} + \underbrace{\frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{2}}_{q_3} + \frac{h\Delta y}{k}(T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

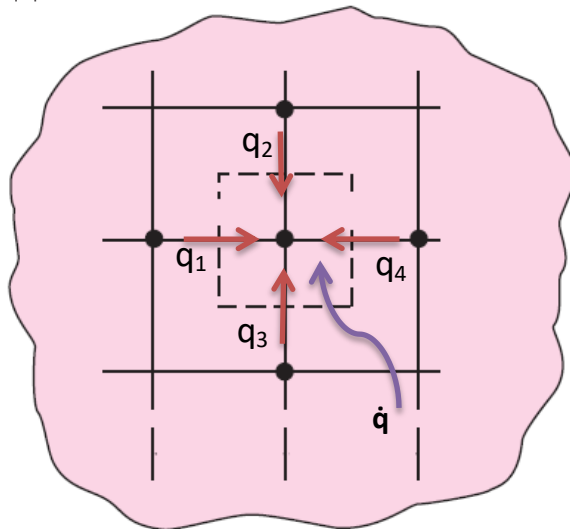
$$\xrightarrow{\text{ساده تر}} \frac{1}{2}(T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(2 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} + \frac{h\Delta x}{k}T_\infty = 0$$

محیط
و جامد

$$\text{عدد بایوت} , \left(\text{بدون بعد} \right) : \frac{\text{انتقال حرارت به طریق جابجایی}}{\text{انتقال حرارت به طریق هدایت}} = Bi = \text{Biot Number} : \frac{\bar{h} \Delta x}{k}$$

جامد

معادله ی گره هنگامی که گره در داخل صفحه باشد و تولید حرارت داشته باشد :

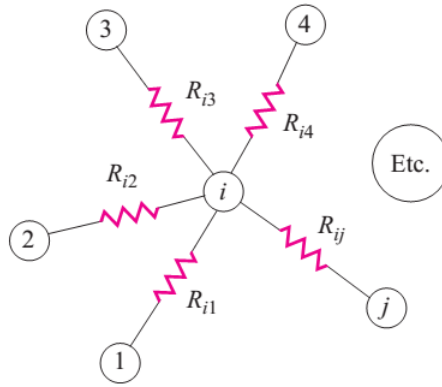


$$\text{موازنه} : q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dot{q}(\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1) = 0$$

در حالت کلی برای هر گره در هر صفحه ای با هر شکل هندسی ای به این صورت عمل می کنیم :

$$q_i + \sum_j \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0 \quad , \quad R_{ij} : \text{Heat Resistance}$$

$$i \text{ گرہ } \equiv q_i = \dot{q} \times \Delta V$$



فصل چهارم : انتقال حرارت هدایتی ناپایا

$$\nabla^2 T = \begin{cases} \text{یک بعدی} : \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = cte = -\frac{q}{kA} \\ \text{دو بعدی} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

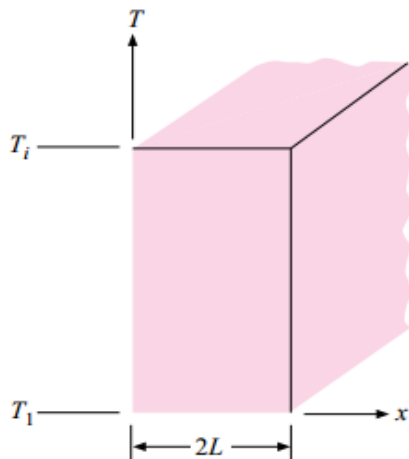
به صورت تحلیلی، عددی

(معادله کلی) $\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ انتقال حرارت ناپایا با منبع حرارتی

$$\begin{cases} \text{انتقال حرارت ناپایا و بدون منبع حرارتی 1 بعدی} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow (T = T(x, t)) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow (T = T(x, y, t)) \end{array} \right. \\ \text{انتقال حرارت ناپایا و بدون منبع 2 بعدی} \end{cases}$$

• پروفیل دما در یک تیغه

یک تیغه به ضخامت 2L با دمای اولیه و یکنواخت T_i در تمامی نقاط آن در نظر بگیرید که ناگهان دمای سطوح آن را به T_1 می‌رسانیم. مثلاً با قرار دادن تیغه در یک محیط سرد.



$$\begin{cases} @x = 0 : T = T_1 \\ @t = 0 : T = T_i \\ @x = 2L : T = T_1 \end{cases}$$

یک صفحه نامحدود که سطوح آن ناگهان در معرض سرما قرار می‌گیرد

روش تفکیک متغیرها $\frac{\partial^2 \theta}{\theta x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ جهت سهولت تغییر متغیر $\theta = T - T_1 \rightarrow$

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot H(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \rightarrow X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \\ \frac{dH}{dt} + \alpha \cdot \lambda^2 H = 0 \rightarrow H(t) = c_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \end{cases}$$

$$\theta = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) \times (c_3 e^{-\alpha \lambda^2 t})$$

$$B.C \begin{cases} \forall t > 0, x = 0 \quad \overline{T = T_1} \quad \theta = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ \forall t > 0, x = 2L \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} c_2 \neq 0 \\ \sin 2\lambda L = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2L} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\rightarrow \theta_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left[\frac{n\pi}{2L}\right]^2 \alpha \cdot t} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

$$I.C \{t = 0, 0 \leq x \leq 2L \rightarrow \theta = \theta_i = T_i - T_1$$

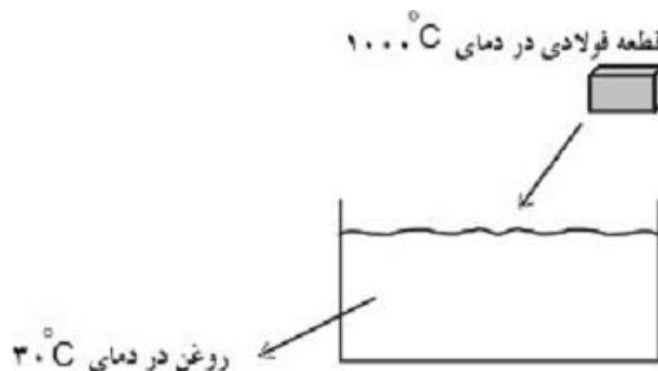
$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2L} \xrightarrow{\text{بسط سینوسی}} c_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \theta_i \sin \frac{n\pi x}{2L} \cdot dx = \frac{4}{n\pi} \theta_i$$

$$\rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left[\frac{n\pi}{2L}\right]^2 \alpha \cdot t} \sin \frac{n\pi x}{2L} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Lumped Heat Capacity Systems :

• سیستم ظرفیت حرارتی متمرکز شده

اگر بتوانیم فرض کنیم دمای تمامی نقاط مختلف جسم در هر لحظه ی t_0 ، مقدار یکسان T باشد، (جسم با دمای واحد) در معادله ی ما یک تغییر اساسی ایجاد می شود. مثلا یک لیوان چای، تمام نقاط آن در لحظه ی $T_1 \leftarrow t_1$ و در لحظه ی $T_2 \leftarrow t_2$ دارند. این فرض را برای یک قطعه نیز می توان به کار برد. چنین سیستم هایی که این فرض برای آن ها صادق باشد، سیستم حرارتی متمرکز شده گویند یعنی T فقط تابع زمان است.



موازنه انرژی برای قطعه فولادی:

$$\text{input} + \text{generation} - \text{output} = \text{accumulation}$$

تغییرات انرژی داخلی جسم = حرارتی که به صورت جابجایی از سطح جسم خارج می شود.

$$h \cdot A \cdot (T - T_{\infty}) = -\rho c_p V \frac{dT}{dt}$$

$$-\frac{h \cdot A}{\rho c_p V} \cdot dt = \frac{dT}{(T - T_{\infty})} \quad \int_{T_0}^{T_{\infty}} \quad \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\left[\frac{hA}{\rho c_p V}\right] \cdot t}$$

T: دمای جسم در هر لحظه ی t

T₀: دمای اولیه جسم در لحظه ی صفر

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \exp \left\{ - \left[\frac{h \frac{V}{A}}{k} \right] \left[\frac{kt}{\rho \cdot c_p \left(\frac{V}{A} \right)^2} \right] \right\}$$

$\frac{h}{K} \left(\frac{V}{A} \right)$ عدد بدون بعد بایوت $Bi = Biot \ Number$

$$\frac{\left(\frac{V}{A} \right) / K}{\frac{1}{h}} = \frac{\text{مقاومت هدایتی جسم در برابر انتقال حرارت}}{\text{مقاومت جابجایی در برابر انتقال حرارت}} = \frac{\text{مقاومت درونی جسم}}{\text{مقاومت بیرونی جسم}}$$

به عبارتی عدد بایوت معرف نسبت انتقال حرارت Conduction به Convection است. اگر عدد بایوت عددی کوچک باشد، یعنی مقاومت هدایتی جسم در برابر مقاومت جابجایی آن قابل اغماض است. (مقاومت درونی کمتر از مقاومت بیرونی). به عبارتی حرارت در داخل جسم راحت انتقال یافته ولی از سطح جسم به آهستگی بیرون می رود. (مانند فلزات)

اگر عدد بایوت بزرگ باشد، مقاومت هدایتی جسم مورد نظر در برابر مقاومت جابجایی آن بسیار بزرگ است. به عبارتی حرارت به سختی به سطح جسم می رود ولی به محض رسیدن به سطح جسم به سرعت از آن بیرون می رود. (مانند شیشه)

if $Bi < 0.1 \rightarrow$ جسم را می توان متمرکز فرض کرد

$$\frac{K \cdot t}{\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{V}{A} \right)^2} = \text{عدد بدون بعد فوریه} = \text{Fourier number} = Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{t}{t^*}$$

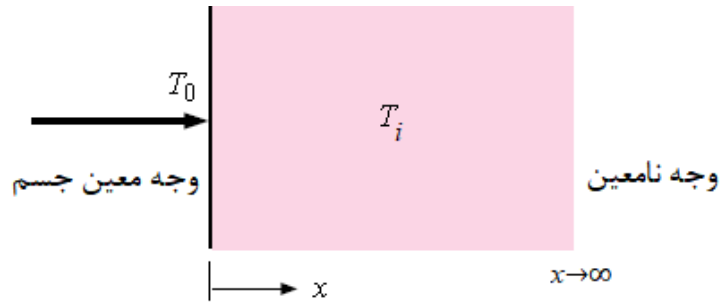
$$\left(\frac{V}{A} \right) = L \quad \text{طول مشخصه ی جسم} \quad \frac{L^2}{\alpha} = t^*$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\{-Bi \cdot Fo\}$$

حال اگر $Bi < 0.1$ صادق نباشد، (به عبارتی جسم Lumped نباشد.) باید معادلات را حل کنیم و توزیع دما T(x,t) را به دست آوریم. یک حالت ساده عبارتست از:

پروفیل دما در یک جسم نیمه متناهی (نیمه بی نهایت)

حالت اول: دمای ثابت در وجه معین



$$T(x, t) \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

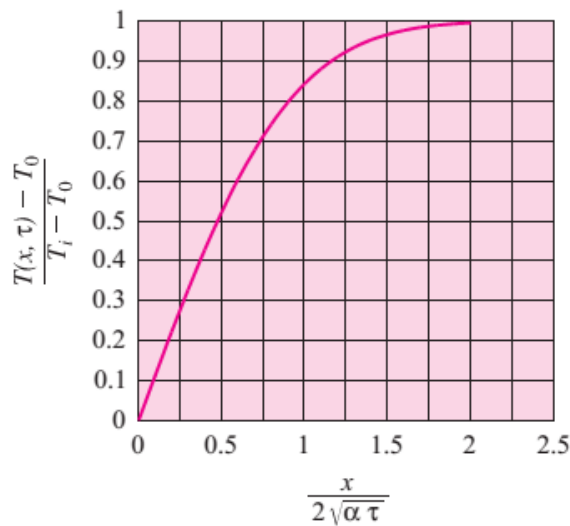
$$B.C : \begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(0, t) = T_0 \end{cases} \quad t > 0$$

پس از حل معادله در درس ریاضیات مهندسی

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

T_i : دمای اولیه

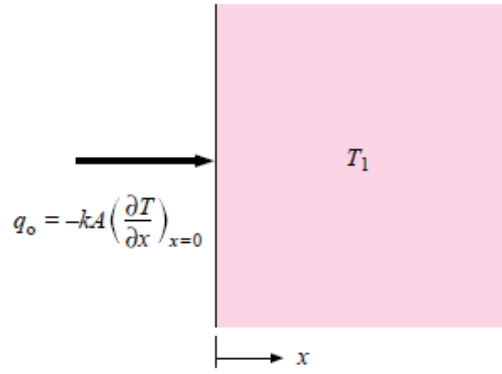
T_0 : دمای سطح



توزیع درجه حرارت در جسم نیمه بی نهایت (تغییر ناگهانی در دمای سطح معین)

حالت دوم: شار ثابت در وجه معین

پروفیل دما هنگامی که در وجه معین جسم یک شار حرارتی ثابت $\left(\frac{q_0}{A}\right)$ برقرار باشد :



نحوه نامگذاری در جریان گذرا در یک جسم صلب نیمه محدود

$$B.C: \begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{q_0}{A}, \quad t > 0 \end{cases}$$

تابع خطا error Function

$$T - T_0 = \frac{2q_0 \sqrt{\alpha t}}{k.A} \exp\left(\frac{-x^2}{4.\alpha t}\right) - \frac{q_0}{kA} x \left(1 - \overbrace{\text{erf}}^{\text{تابع خطا Error Function}} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

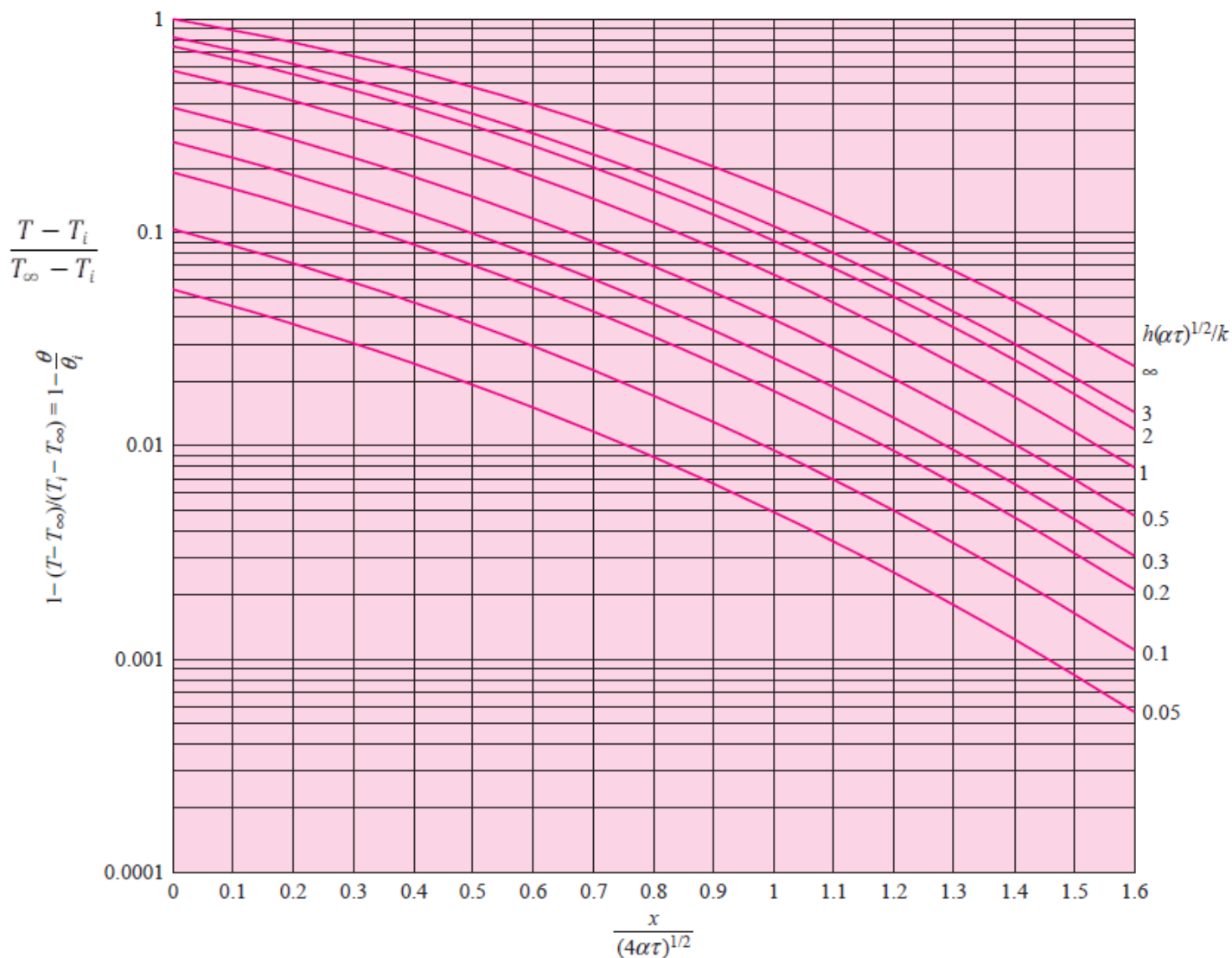
حالت سوم: انتقال حرارت جابجایی در وجه معین

پروفیل دما هنگامی که در وجه معین جسم ، انتقال حرارت به صورت جابجایی با محیط داشته باشیم:

$$B.C: \left\{ -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h.A(T_\infty - T|_{x=0}) \right.$$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{erf} X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \right] \left[1 - \text{erf} \left(X + \frac{h\sqrt{\alpha.t}}{k} \right) \right]$$

$$\left(X = \frac{x}{2\sqrt{\alpha.t}} \right)$$



توزیع درجه حرارت در یک جسم نیمه محدود با شرایط مرز جابجایی

اشکال یا اجسام هندسی معین دیگر

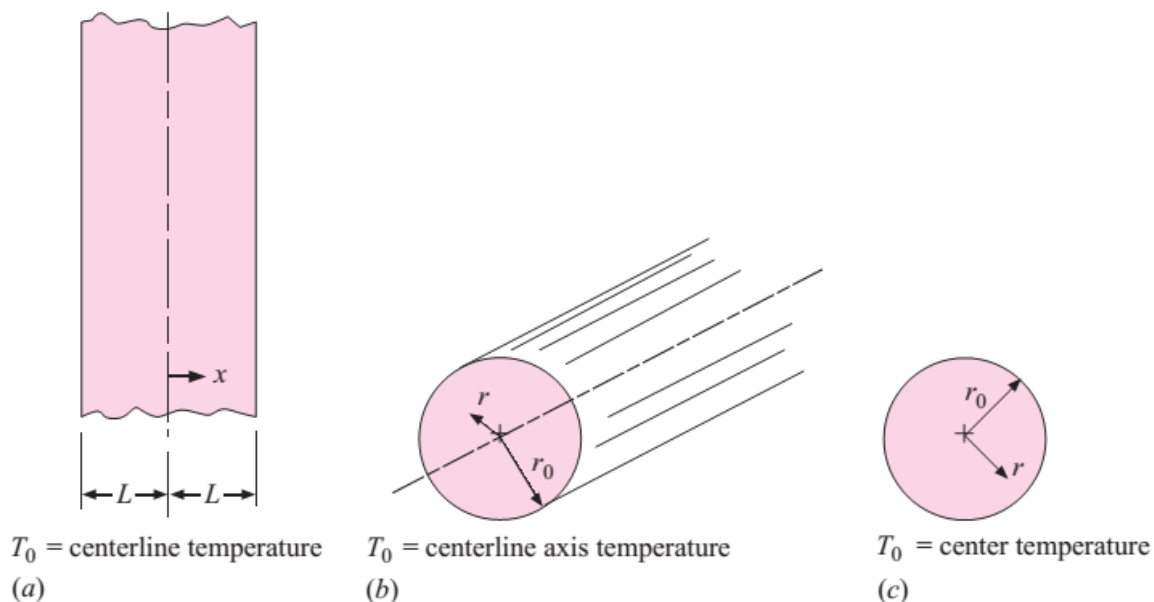
برای سایر اشکال هندسی نیز جواب‌هایی به دست آمده است. مهمترین این اشکال هندسی عبارتند از:

- صفحه یا تیغه‌ای که ضخامتش نسبت به سایر ابعادش کوچک باشد.

- استوانه (میله) ای که قطرش در مقایسه با طولش کوچک باشد.

- گوی (کره)

نتایج حاصله برای این هندسه‌ها به صورت ترسیمی توسط هایسلر گزارش شده است و نحوه نمادگذاری این سه حالت در شکل زیر نشان داده شده است:



اجسام یک بعدی که ناگهان در معرض محیط جابجایی در T_∞ قرار می گیرند.

(الف) یک صفحه نامحدود به ضخامت $2L$ (ب) استوانه نامحدود به شعاع r_0 (ج) کره به شعاع r_0

در تمام این حالات، درجه حرارت محیط جابجایی T_∞ و درجه حرارت مرکز در $r = 0$ یا $x = 0$ برابر با T_0 در نظر گرفته شده است. همچنین فرض می شود در زمان صفر، تمام این اجسام در درجه حرارت اولیه ی یکنواخت T_i قرار داشته باشند.

در این نمودارها از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$\theta = T(x, t) - T_\infty \quad \text{یا} \quad T(r, t) - T_\infty$$

$$\theta_i = T_i - T_\infty$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty$$

❖ اگر درجه حرارت خط مرکزی مد، نظر باشد، برای تعیین θ_0 و سپس T_0 فقط نیاز به یک نمودار می باشد. برای تعیین درجه حرارت نقاطی غیر از مرکز، لازم است از دو نمودار برای تعیین حاصلضرب زیر استفاده کرد:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i} \frac{\theta}{\theta_0}$$

نمودارهای توزیع دما

شکل زیر درجه حرارت میانه ی یک صفحه ی نامحدود به ضخامت $2L$ را در مقیاس کامل نشان می دهد.

Figure 4-7 | Midplane temperature for an infinite plate of thickness $2L$: (a) full scale.

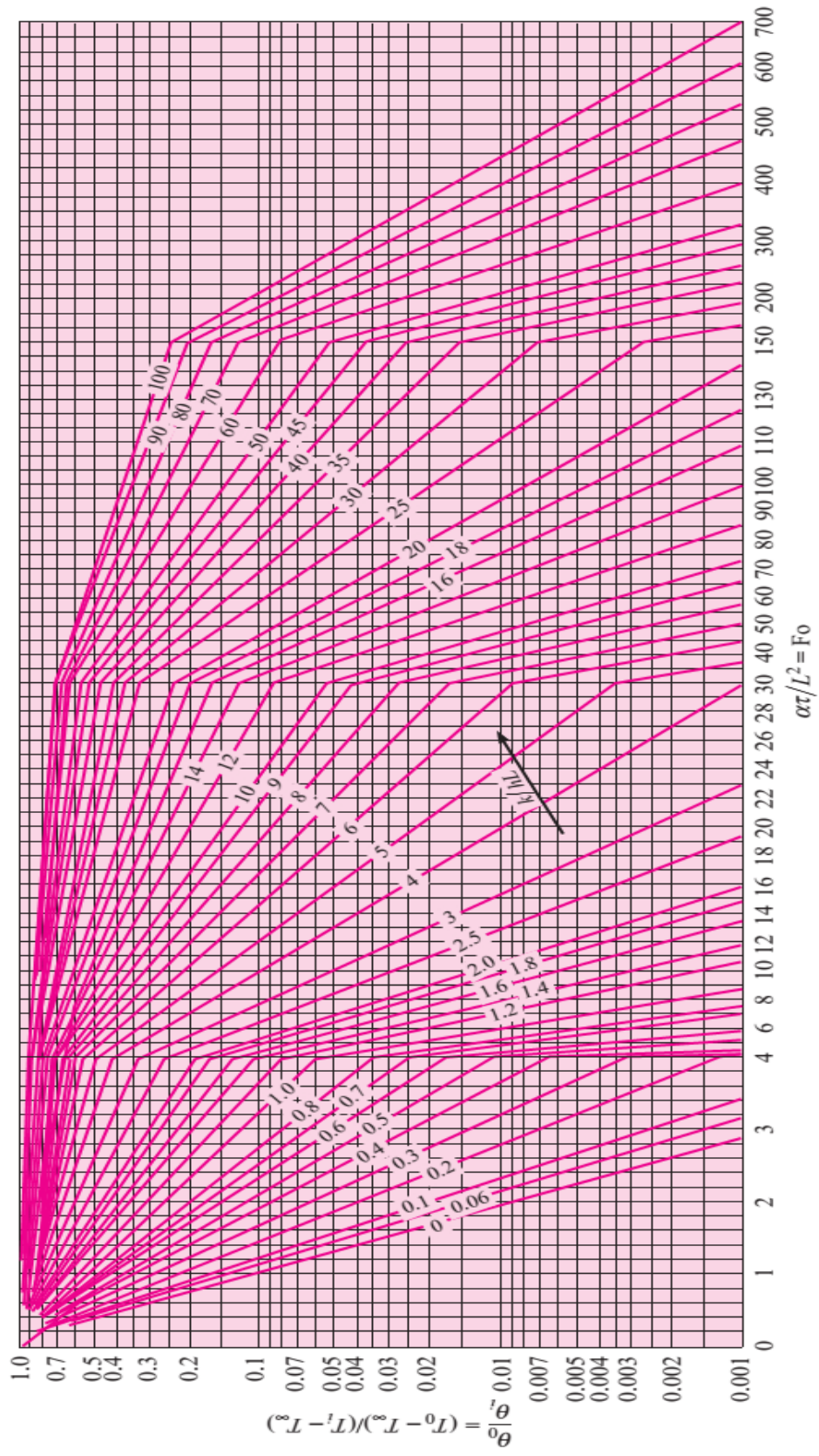
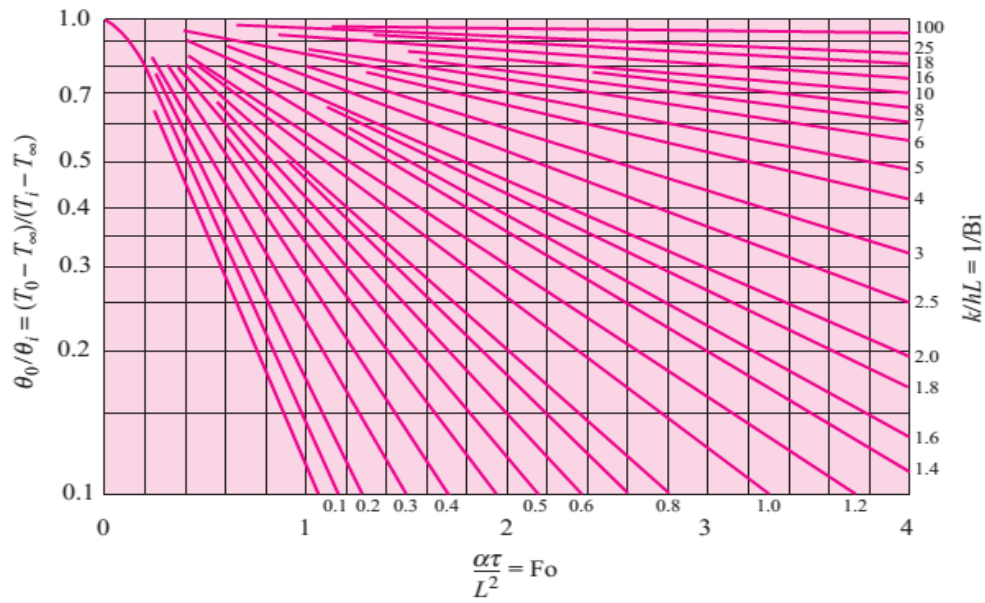


Figure 4-7 | (Continued). (b) expanded scale for $0 < Fo < 4$, from Reference 2.



شکل زیر درجه حرارت محور یک استوانه‌ی نامحدود به شعاع r_0 را نشان می دهد.

Figure 4-8 | (Continued). (b) expanded scale for $0 < Fo < 4$, from Reference 2.

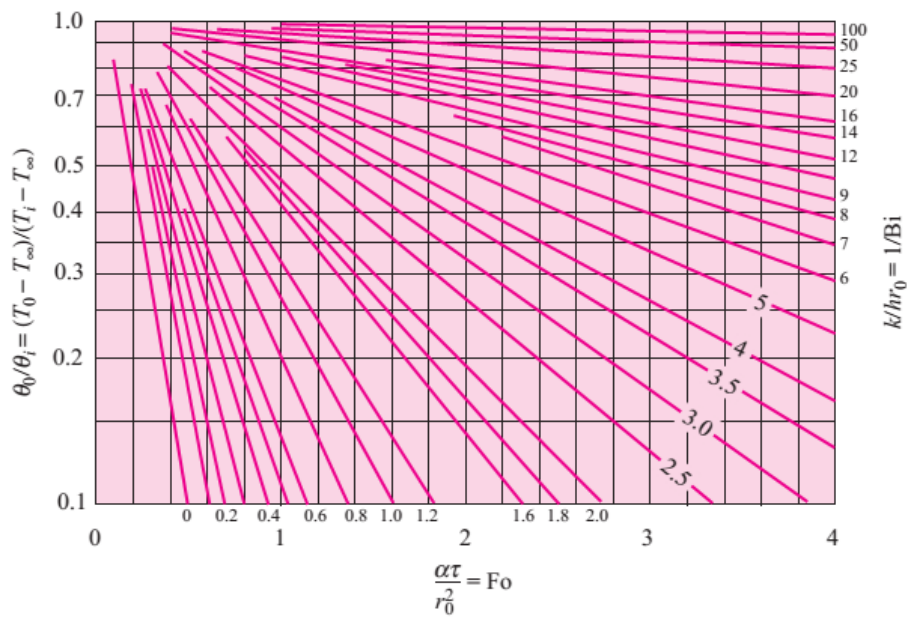
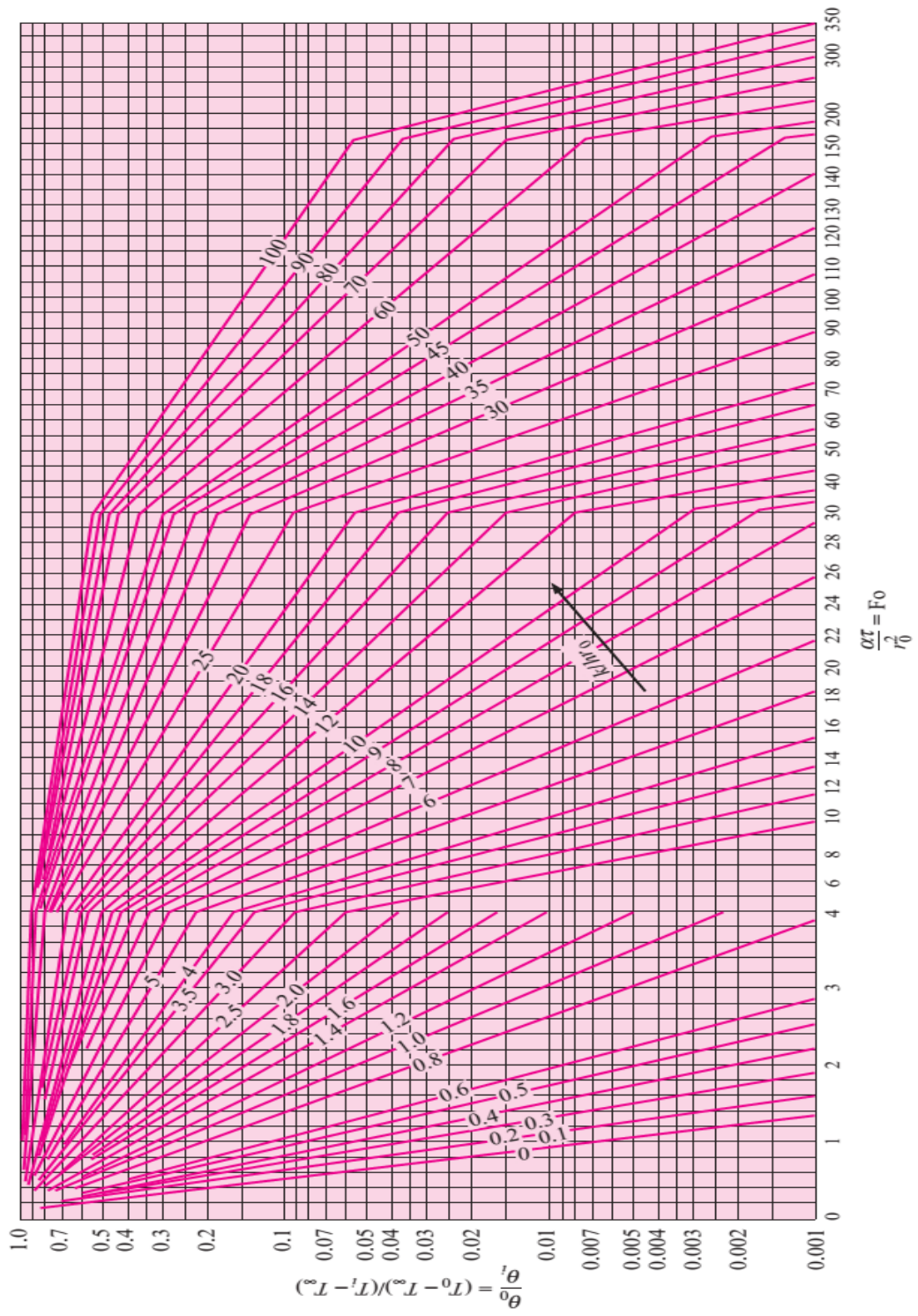


Figure 4-8 | Axis temperature for an infinite cylinder of radius r_0 : (a) full scale.

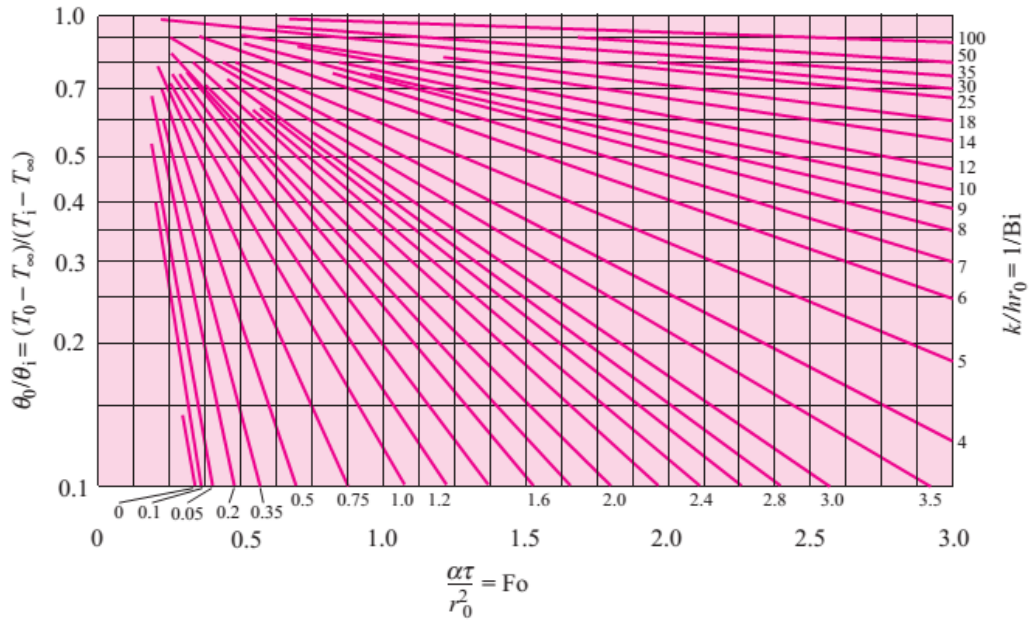


شکل زیر درجه حرارت مرکز یک کره به شعاع r_0 را نشان می دهد.

Figure 4-9 | Center temperature for a sphere of radius r_0 : (a) full scale.

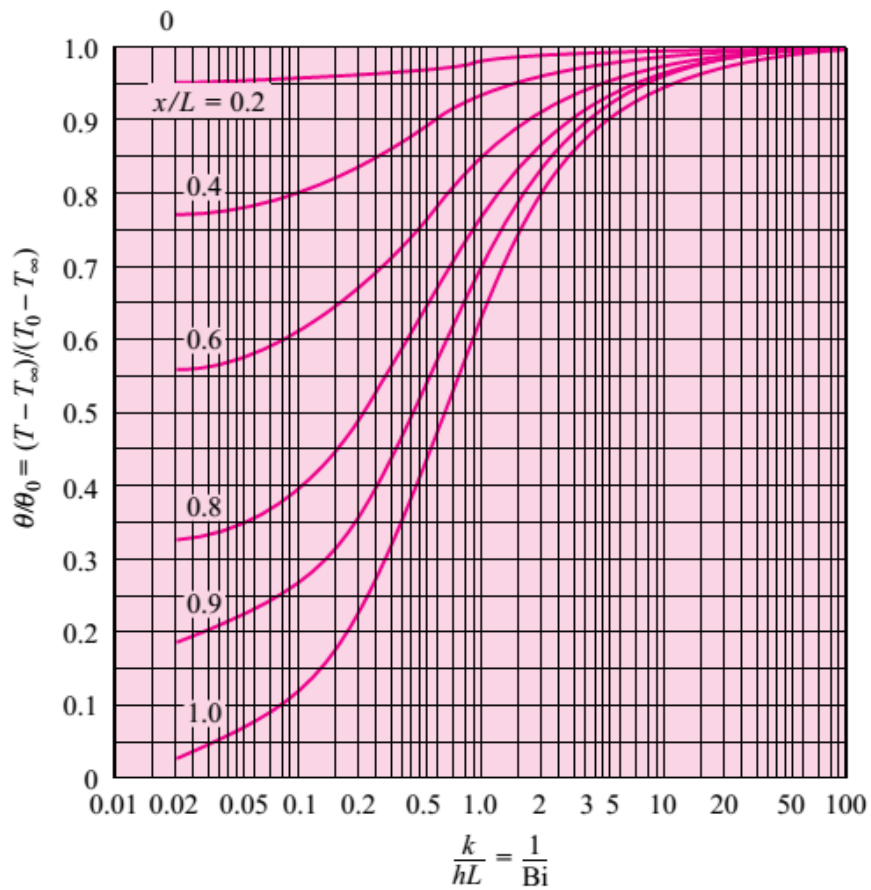


Figure 4-9 | (Continued). (b) expanded scale for $0 < Fo < 3$, from Reference 2.

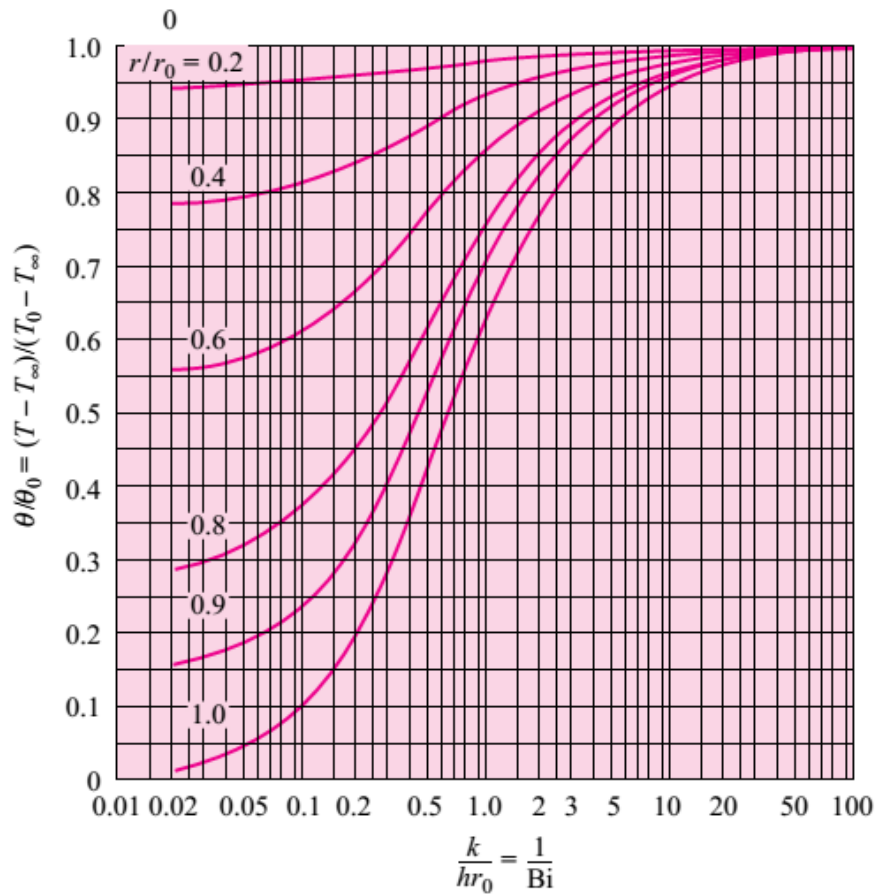


(b)

شکل زیر تابع درجه حرارت بر حسب درجه حرارت مرکز، در یک صفحه‌ی نامحدود به ضخامت $2L$ را نشان می‌دهد.

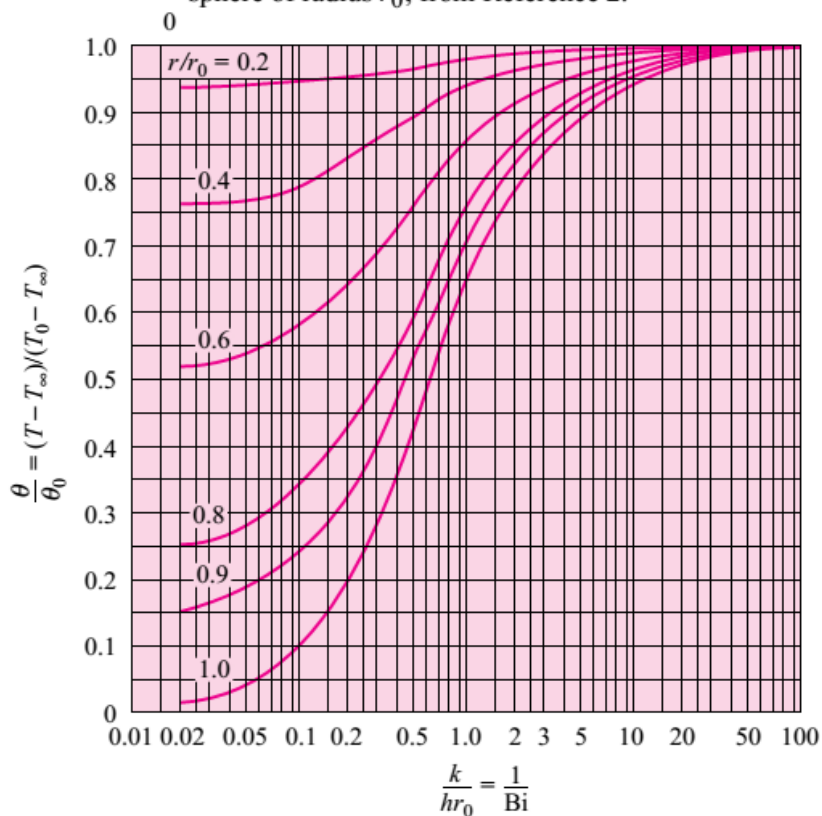


شکل زیر تابع درجه حرارت بر حسب درجه حرارت محور در یک استوانه به شعاع r_0 را نشان می‌دهد.



شکل زیر تابع درجه حرارت، بر حسب درجه حرارت مرکز در یک کره به شعاع r_0 را نشان می‌دهد.

Figure 4-12 | Temperature as a function of center temperature for a sphere of radius r_0 , from Reference 2.



شکل زیر درجه حرارت مرکز برای صفحات، استوانه‌ها و کره‌ها با مقدار کوچک h را نشان می‌دهد.

Figure 4-13 | Temperature variation with time for solids that may be treated as lumped capacities: (a) $0 < \text{BiFo} < 10$, (b) $0.1 < \text{BiFo} < 1.0$, (c) $0 < \text{BiFo} < 0.1$.
 Note: $(A/V)_{\text{inf plate}} = 1/L$, $(A/V)_{\text{inf cyl}} = 2/r_0$, $(A/V)_{\text{sphere}} = 3/r_0$. See Equations (4-5) and (4-6).

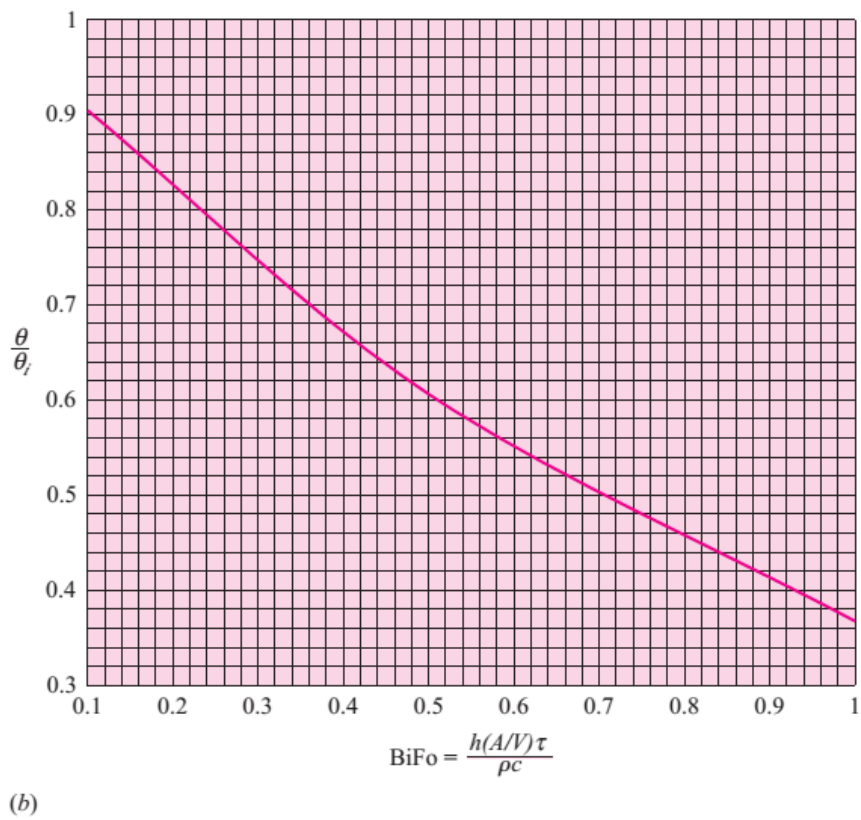
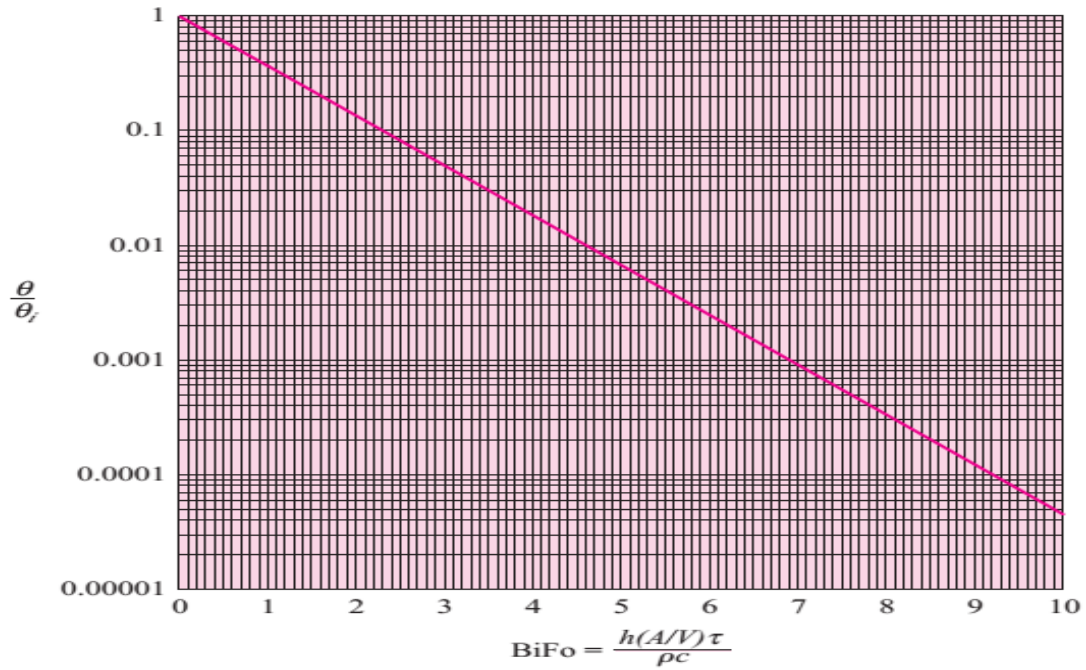
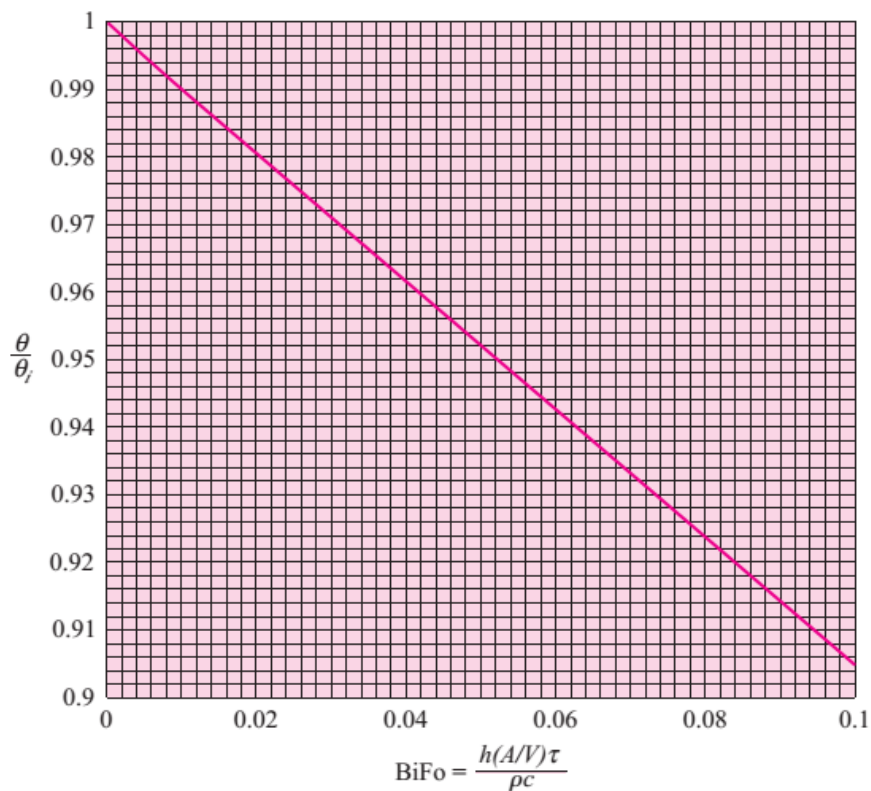


Figure 4-13 | (Continued).



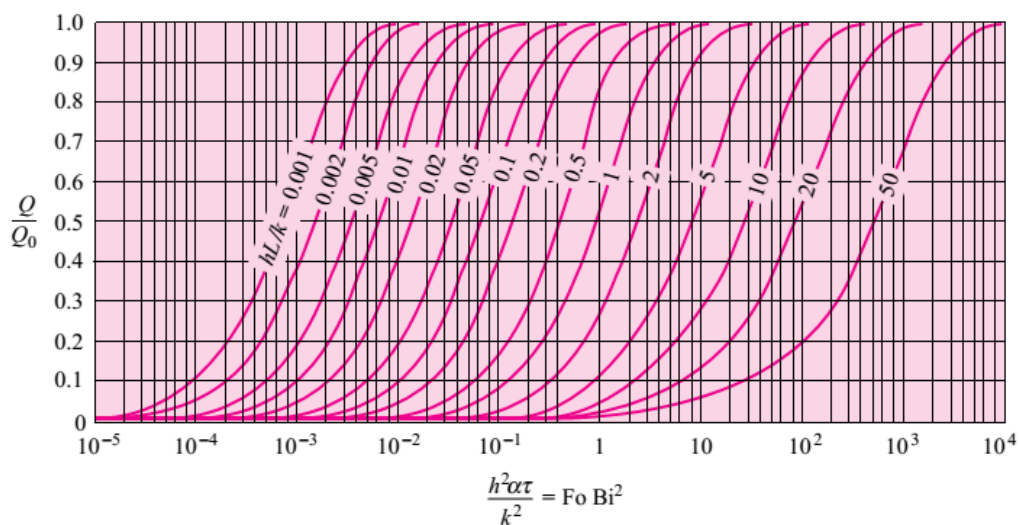
(c)

نمودارهای اتلاف حرارت

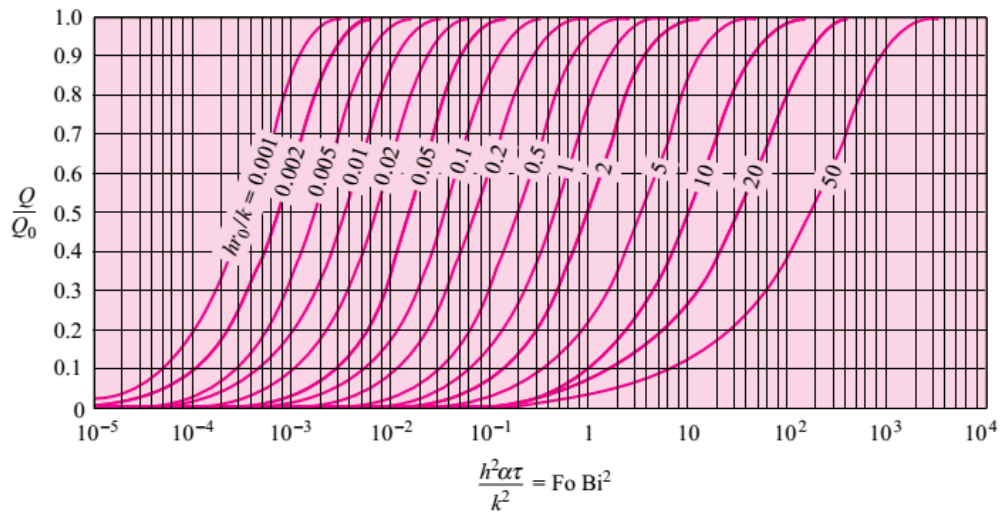
Q: اتلاف حرارت واقعی در زمان t و Q₀: انرژی داخلی اولیه جسم

$$Q_0 = \rho CV(T_i - T_\infty) = \rho CV\theta_i$$

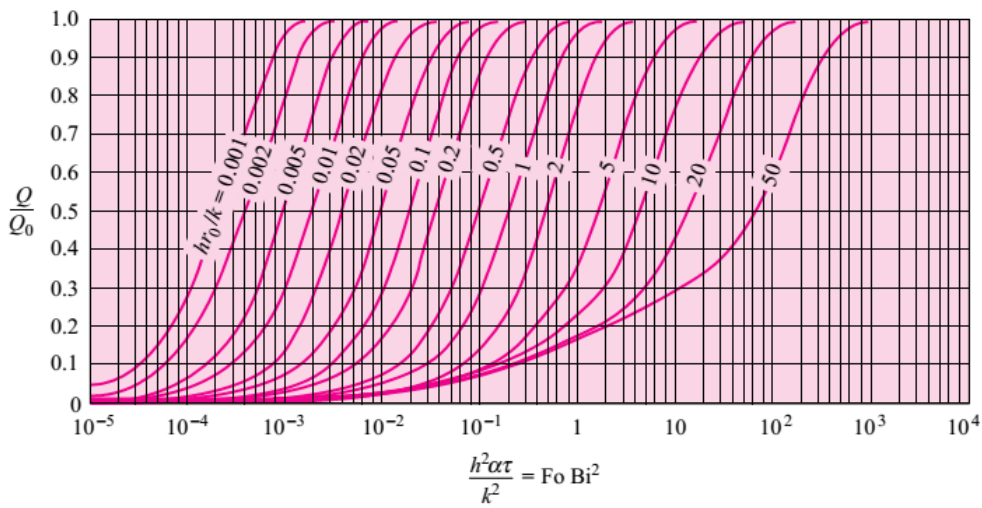
شکل زیر اتلاف حرارت بدون بعد Q/Q₀ برای صفحه‌ی محدود به ضخامت 2L را نشان می‌دهد.



شکل زیر اتلاف حرارت بدون بعد Q/Q₀ برای یک استوانه نامحدود به شعاع r₀ نسبت به زمان را نشان می‌دهد.



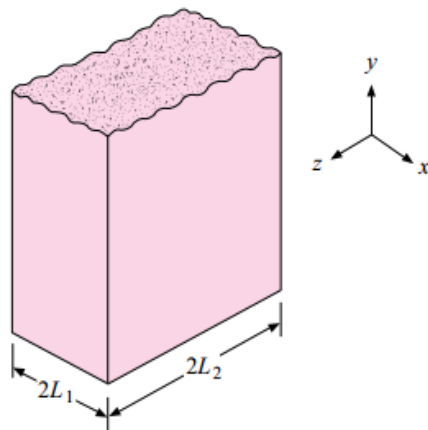
شکل زیر اتلاف حرارت بدون بعد Q/Q_0 برای یک کره به شعاع r_0 نسبت به زمان را نشان می دهد.



Multi Dimensional systems

• سیستم‌های چند بعدی

- توزیع دما در یک میله‌ی با مقطع مستطیل شکل :



میله مستطیلی نامحدود

$$T(x, z, t) = ?$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

میله‌ی مورد نظر (حجم مورد نظر) را به صورت تلاقی دو تیغه با پهنای $2L_1$ و $2L_2$ در نظر می‌گیریم.

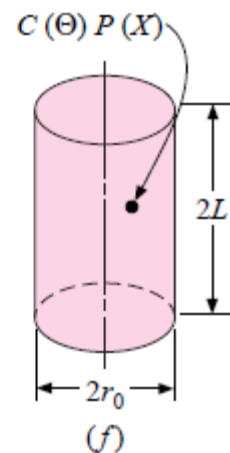
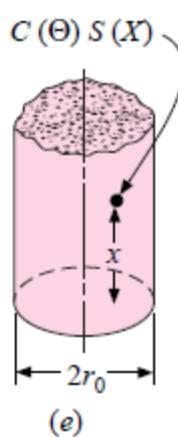
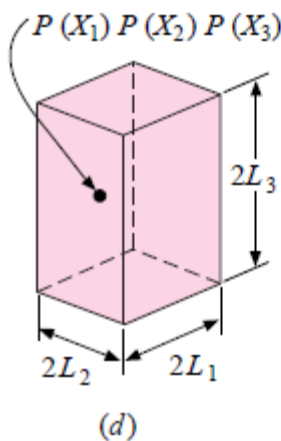
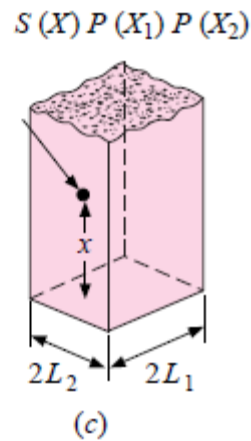
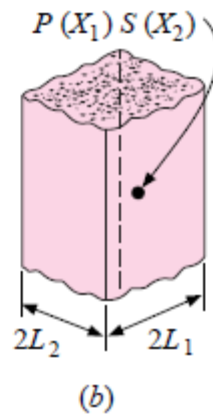
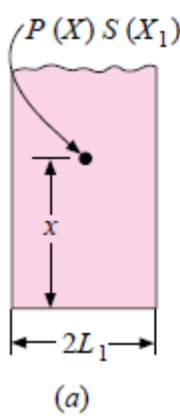
$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right) = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{تیغه } 2L_1} \times \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{تیغه } 2L_2}$$

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty}\right) = \left(\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty}\right)_{\text{تیغه } 2L_1} \times \left(\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty}\right)_{\text{تیغه } 2L_2}$$

طرف راست معادله به طور جداگانه از منحنی‌های هایسلر محاسبه می‌شوند.

کتاب برای تعدادی احجام سه بعدی (از سه طرف معین) توزیع دما را به صورت حاصل ضرب سه تابع در نظر گرفته است. به این صورت :

$$if \begin{cases} p(x) \rightarrow \text{جواب مربوط به یک تیغه} \\ S(x) \rightarrow \text{جواب مربوط به جسم محدود از یک طرف} \\ C(\theta) \rightarrow \text{جواب مربوط به یک استوانه} \end{cases} \begin{cases} \text{بنابراین برای اجسام دیگر به صورت حاصل ضرب} \\ \text{این توابع در نظر گرفته می‌شود} \end{cases}$$



بنابراین به طور کلی:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{combined solid}} = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{intersection solid 1}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{intersection solid 2}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{intersection solid 3}}$$

انتقال حرارت برای تقاطع دو جسم:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]$$

انتقال حرارت برای تقاطع سه جسم:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right] + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right] \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2\right]$$

فصل پنجم: اصول انتقال حرارت جابجایی (جریان خارجی)

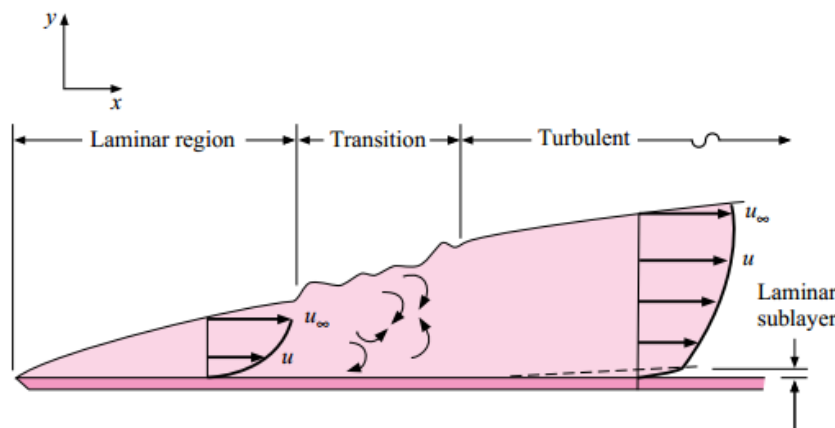
در این دو فصل روابط عمده (تحلیلی و تجربی) در محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت به طریق جابجایی را بررسی می‌کنیم.

$$Q_{\text{convection}} = h \cdot \underset{\substack{\text{انتقال} \\ \text{حرارت}}}{\underset{\text{سطح}}{A}} \left(\underset{\substack{\text{دمای جداره}}}{T_{\text{ب}}} - \underset{\substack{\text{دمای سیال}}}{T_{\infty}} \right)$$

h برای سیال ساکن تعریف نمی‌شود و ناشی از حرکت سیال است.

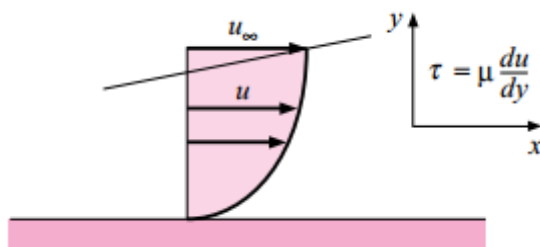
حرکت سیال بر روی صفحه :

در این قسمت هدف، به دست آوردن پروفیل سرعت $u = u(x, y)$ و پروفیل دما $T = T(x, y)$ است که از روی آن‌ها نحوه‌ی انتقال حرارت بهتر درک شده و ضمناً از روی آن‌ها می‌توانیم h را به دست آوریم.



لایه‌ی مرزی: لایه‌ی بسیار نازک بین u_{∞} و سرعت‌های کمتر. لایه‌ی چسبیده به صفحه حرکت ندارد و انتقال حرارت در آن به صورت هدایت است. یعنی ریشه‌ی انتقال حرارت به صورت جابجایی، هدایت حرارتی است.

حرکت Laminar (آرام) بر روی صفحه :



جهت محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت جابجایی (h)، در جریان آرام حداقل ۳ روش وجود دارد:

روش اول: تشابهات بین سه پدیده‌ی انتقال مومنتوم، انتقال حرارت و انتقال جرم که خصوصاً برای جریان درهم مفید بوده و در این درس بحث نمی‌شود.

روش دوم: آنالیز ابعادی

آنالیز ابعادی با تلفیقی از نتایج تجربی، پارامترهای دخیل را ترکیب کرده و به صورت اعداد بی‌بعد درمی‌آورد. البته حذف یکی از پارامترها موجب اشتباه می‌شود.

$$\frac{q}{A} = h = f \left(\underbrace{\rho, \mu, C_p, k}_{\text{دانشیته سیال, ویسکوزیته, ظرفیت حرارتی}}, \underbrace{u, x \text{ یا } d}_{\text{سرعت سیال, طول صفحه یا قطر لوله}}, \underbrace{\Delta T}_{\text{سیال دیواره } T_w - T_{\infty}} \right)$$

رینولدز برای لوله : $Re = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu}$

رینولدز موضعی برای صفحه : $Re = \frac{\rho \cdot u \cdot x}{\mu}$

مفهوم فیزیکی رینولدز: نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای ناشی از لزجت است.

عدد پرانتل : $Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{k}$

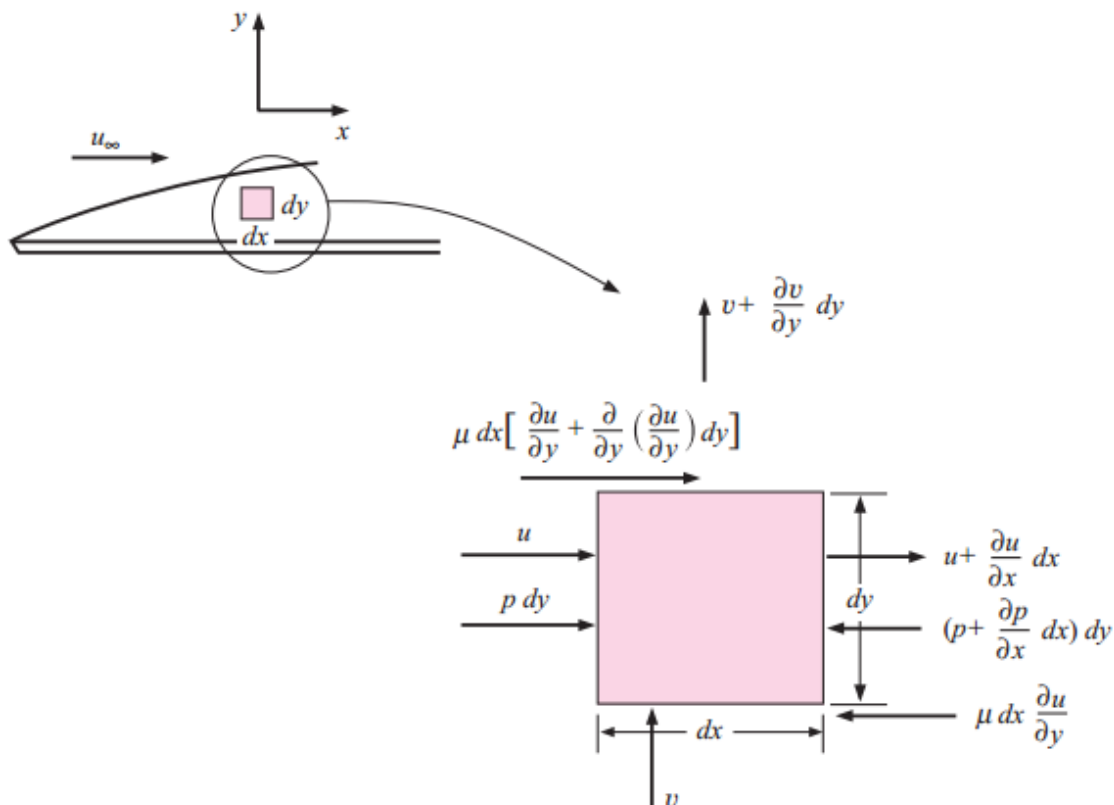
عدد ناسلت برای لوله : $Nu_d = \frac{h \cdot d}{k}$

ناسلت موضعی برای صفحه : $Nu_x = \frac{h \cdot x}{k}$

روش سوم، حل دقیق ریاضی معادلات لایه‌ی مرزی (Boundary Layer (B.L):

به عبارتی نوشتن معادلات جرم و حرارت و حل هم‌زمان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل.

جریان Laminar:



فرضیات برای حل مسئله :

۱ - سیال تراکم ناپذیر (Incompressible)، (چگالی ثابت)

۲ - ویسکوزیته ثابت μ

۳ - خواص فیزیکی ثابت C_p, k

۴ - حرکت سیال به صورت پایا و در جهت Z تغییرات نداریم.

۵ - نیروهای برشی ناشی از ویسکوزیته در امتداد y قابل اغماض است.

۶ - هدایت حرارتی در امتداد حرکت (x) ناچیز است.

۷ - تغییر فشار در جهت عمود بر صفحه قابل اغماض است.

موازنه‌ی جرم :

جرم ورودی به المان از پایین و وجه چپ در واحد زمان = جرم خروجی از المان از وجه راست و بالا در واحد زمان

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx = \rho \cdot u (dy \times 1) + \rho \cdot v (dx \times 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(I) معادله پیوستگی جرم در ۲ بعد (Continuity Equation)}$$

موازنه‌ی نیرو (قانون دوم نیوتن) :

$$\sum F_x = \frac{d(\text{مومنتوم})_x}{dt} = \frac{d(M \cdot V_x)}{dt}$$

افت فشار خالص در امتداد x : $-\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dy$

خالص نیروهای برشی در امتداد x : $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy$

مومنتوم وارده از پایین در جهت x : $(\rho \cdot v \cdot dx) \cdot u$

مومنتوم خروجی از بالا در جهت x : $\underbrace{\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \right) dx}_{\text{جرم}} \cdot \underbrace{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \right)}_{\text{سرعت در جهت } x}$

مومنتوم ورودی از وجه چپ در جهت x : $(\rho u \cdot dy) u$

مومنتوم خروجی از وجه راست در جهت x : $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) dy \times \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right)$
 $= \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right)^2 \cdot dy$

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}v = \text{تغییرات مومنتوم} = \text{حاصل نیروهای فشاری} + \text{حاصل نیروهای لزجتی}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx \cdot dy - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \rho \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right)^2 dy - \rho u^2 dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \right) \times \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx - \rho u \cdot v dx$$

$$\rightarrow \rho \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad \text{Momentum Equation}$$

موازنه (معادله) مومنتوم (ناویر استوکس) :

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2)$$

از حل معادله‌ی ۱ و ۲، u و v به دست می‌آیند. سرعت u برای ما اهمیت دارد.

با استفاده از روش حل تقریبی (فون کارمن) از حل معادله‌ی مومنتوم، جواب‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad \text{حل تقریبی}$$

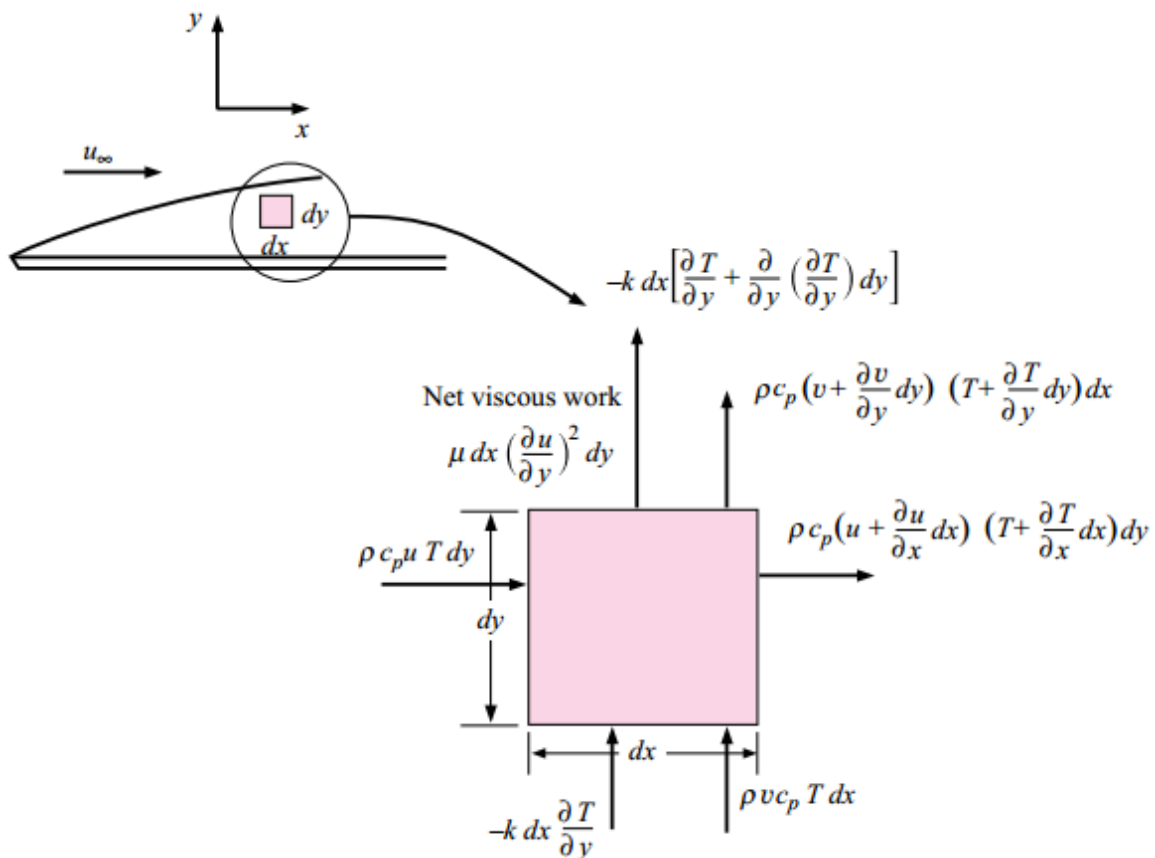
$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.649}{\sqrt{Re_x}} \cong \frac{5.0}{\sqrt{Re}}$$

موازنه انرژی :

تحلیل پیشین از نقطه نظر دینامیک سیال در سیستم لایه مرزی جریان آزاد مد نظر قرار گرفت. اکنون معادله انرژی برای این سیستم را به دست می آوریم.

حجم کنترل جزئی نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید. برای ساده شدن تحلیل فرض می کنیم که:

۱. جریان پایدار تراکم ناپذیر باشد.
 ۲. لزجت، قابلیت هدایت حرارتی و گرمای ویژه ثابت باشند.
 ۳. هدایت حرارتی در جهت جریان (X) قابل نظر باشد.
- اکنون برای جزء نشان داده شده در شکل موازنه انرژی را می توان نوشت. (واحد عمق در جهت Z می باشد).
(کمیت انرژی های هدایت شده و جابه جاشده در شکل نشان داده شده اند)



سطح dx × تنش برشی = نیروی برشی

فاصله ای که نیرو در واحد زمان نسبت به حجم کنترل $dx dy$ طی می کند × نیروی برشی = کار لزجی

$$= \tau \times (dx \times 1)$$

$$= \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} (dx \times 1) \times \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

انرژی خروجی از سمت راست و بالا بر واحد زمان = کار ناشی از نیروهای لزجت بر واحد زمان + انرژی ورودی از سمت چپ و پایین در همان بر واحد زمان

$$\rho \cdot C_p \left[u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{پیوستگی} = 0} \right) \right] dx \cdot dy = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx \cdot dy + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx \cdot dy$$

$$\rightarrow u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{انرژی}$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{از قبل سرعت}$$

کار ناشی از ویسکوزیته در سرعت‌های کم یعنی جریان **Laminar** قابل اغماض است. این معادله شبیه معادله‌ی سرعت (معادله ۱) به ازای افت فشار صفر است. حال معادله را با به کارگیری کمیت پرانتل مرتب می‌کنیم:

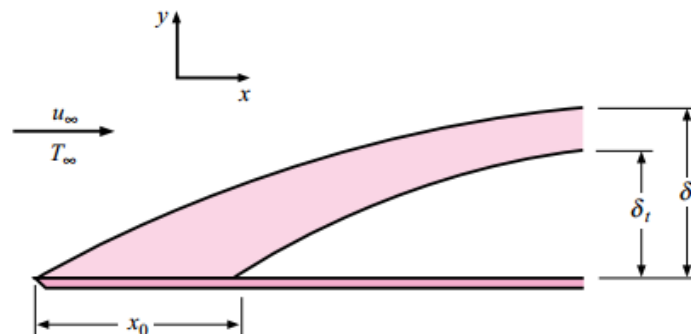
$$\text{عدد پرانتل} = Prantle Number = Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho \cdot C_p} = \frac{C_p \cdot \mu}{k}$$

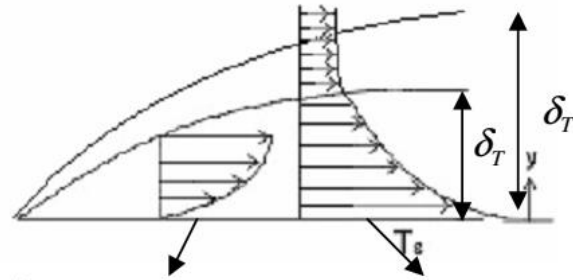
$$= \frac{\text{نفوذ پذیری در مقابل مومنتوم ویسکوزیته سینماتیکی}}{\text{ضریب نفوذ حرارتی}} = \frac{\text{نفوذ پذیری در مقابل مومنتوم}}{\text{نفوذ پذیری در مقابل حرارت هدایتی}}$$

به عبارتی عدد پرانتل نشانگر این است که سیال در برابر مومنتوم مقاوم‌تر است یا در برابر حرارت.

.....

لایه‌ی مرزی حرارتی : مجموعه نقاطی است که دمایشان از T_w به T_∞ می‌رسد. به عبارتی در زیر آن تغییرات دما وجود دارد. ناحیه‌ای که گرادیان‌های درجه حرارت در جریان وجود دارند.





توزیع دما در لایه مرزی حرارتی توزیع سرعت در لایه مرزی هیدرودینامیکی

لایه مرزی هیدرودینامیکی: ناحیه‌ای که نیروهای لزجی احساس می‌گردند.

$$\text{اگر } \alpha > \nu \rightarrow \text{Pr} < 1$$

$$\text{اگر } \alpha < \nu \rightarrow \text{Pr} > 1$$

$$\text{اگر } \alpha = \nu \rightarrow \text{Pr} = 1$$

مشاهده می‌شود در حرکت Laminar شباهت‌هایی بین توزیع درجه‌ی حرارت و توزیع سرعت وجود دارد. به عبارتی اگر $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p}$ و $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ یکی باشند، توزیع سرعت و دما هم‌سان خواهند بود. یعنی لایه‌ی مرزی هیدرودینامیکی و لایه‌ی مرزی حرارتی منطبق برهم خواهند شد.

پس از حل معادله‌ی انرژی، توزیع دما در لایه مرزی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3$$

حال مسئله پیدا کردن عبارتی برای ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_t باقی می‌ماند. این عبارت را می‌توان با تحلیل انتگرالی معادله‌ی انرژی لایه مرزی به دست آورد.

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \frac{1}{1.026} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$$

حال معادله به دست آمده برای δ_t را در معادله توزیع دما قرار داده و در موازنه انرژی آن را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.332 \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x} \sqrt[3]{\text{Pr}} (T_\infty - T_w)$$

$$q'' : \frac{q}{A} = \underset{\substack{\text{ضریب انتقال حرارت} \\ \text{جا به جایی موضعی}}}{h_x} \cdot (T_w - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

با جایگذاری معادله $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$ در موازنه انرژی مقدار h به صورت زیر محاسبه می‌شود: (جریان آرام روی صفحه)

$$\rightarrow h_x = \frac{k}{T_\infty - T_w} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.332 \frac{k}{x} \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr} \quad \text{یا} \quad Nu_x = 0.332 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}$$

.....

$$\text{(بدون بعد)} \quad \text{عدد ناسلت} = \text{Nusselt Number} = Nu_x = \frac{x/k}{1/h_x} = \frac{h_x \cdot x}{k} = \frac{\text{مقاومت هدایتی سیال}}{\text{مقاومت جا به جایی سیال}}$$

تفاوت Nu با Bio :

عدد بایوت برای اجسام صلب تعریف می‌شود و در آن k مربوط به جسم است؛ ولی در ناسلت، k مربوط به سیال است.

مفهوم فیزیکی بایوت : $\frac{\text{مقاومت هدایتی جسم}}{\text{مقاومت جا به جایی محیط اطراف آن}}$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{k} = 0.332 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}$$

.....

در عمل کمیت‌های نقطه‌ای چندان مفید نیستند، بنابراین از کمیت‌های متوسط استفاده می‌کنیم.

تعریف :

$$\bar{h} = h_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x \cdot dx = 2h_{x=L}$$

ضریب انتقال
حرارت متوسط
در طول صفحه‌ای
به طول L

$$\rightarrow \overline{Nu}_x = Nu_L = \frac{\bar{h} \cdot L}{k} = \frac{2h_{x=L} \cdot L}{k} = 2Nu_{x=L} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Nu} = \frac{\bar{h} \cdot L}{k} = 0.664 \sqrt{Re_L} \sqrt[3]{Pr}$$

.....

در این معادله، کلیه‌ی خواص مثل Pr و Re و k در دمای فیلم محاسبه می‌شود که به صورت زیر قابل محاسبه است :

$$T_{\text{film}} = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

.....

$$\text{عدد استانتون} : \text{Stanton Number} = St_x = \frac{Nu_x}{Re_x \cdot Pr} = \frac{\text{انتقال حرارت}}{\text{مکانیک سیالات}}$$

عدد استانتون رابطه بین مکانیک سیالات و انتقال حرارت است.

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x \cdot Pr} = \frac{h_x}{\rho \cdot C_p \cdot u_\infty} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr^2}}$$

.....

رابطه بین اصطکاک سیال و انتقال حرارت:

در این قسمت ارتباط بین اصطکاک سیال و انتقال حرارت را به دست می‌آوریم. به عبارتی تشابه بین انتقال مومنوم و انتقال حرارت.

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \xrightarrow{\text{با سرعت}} \left(\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right)$$

پس از معادله‌ی سرعتی که در قسمت قبل از حل تحلیلی به دست آمد، نسبت به y مشتق گرفته و در معادله تنش جایگذاری می‌کنیم. و معادله تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rightarrow \tau_w = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot u_\infty}{\delta}$$

که در آن، رابطه ضخامت لایه مرزی نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

بنابراین داریم:

$$\tau_w = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot u_\infty}{4.64} \left(\frac{u_\infty}{\nu \cdot x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

تنش برشی روی دیواره را می‌توان بر حسب ضریب اصطکاک سطحی C_f (فیلمی) بین سیال و دیواره بیان کرد:

$$\tau_w = C_f \cdot \frac{\rho \cdot u_\infty^2}{2} \quad (2)$$

C_f : Skin Friction Factor (ضریب اصطکاک سطحی) :

$$\xrightarrow{1=2} \frac{C_f}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot u_\infty}{4.64} \left(\frac{u_\infty}{\nu \cdot x} \right) \frac{1}{\rho u_\infty^2}$$

$$\frac{C_f}{2} = 0.332 Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{برای حرکت لامینار}$$

از ترکیب معادله‌ی فوق و معادله‌ی مربوط به عدد استنتون برای جریان لامینار خواهیم داشت :

$$St_x \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}} = \frac{C_f}{2}$$

این معادله را تشابه رینولدز-استانتون می‌نامند که بیانگر رابطه میان اصطکاک سیال و انتقال حرارت در جریان آرام روی صفحه است.

مثال: هوا در $27^\circ C$ و 1 atm از روی صفحه‌ای مسطح با سرعت 2 m/s می‌گذرد. ضخامت لایه مرزی را در فواصل 20 cm و 40 cm از لبه جلویی صفحه محاسبه کنید. دبی جرمی ورودی به لایه مرزی بین $x=20 \text{ cm}$ و $x=40 \text{ cm}$ را محاسبه کنید. لزجت هوا در $27^\circ C$ برابر $1.85 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$ است. عمق واحد را در جهت Z در نظر بگیرید.

.....

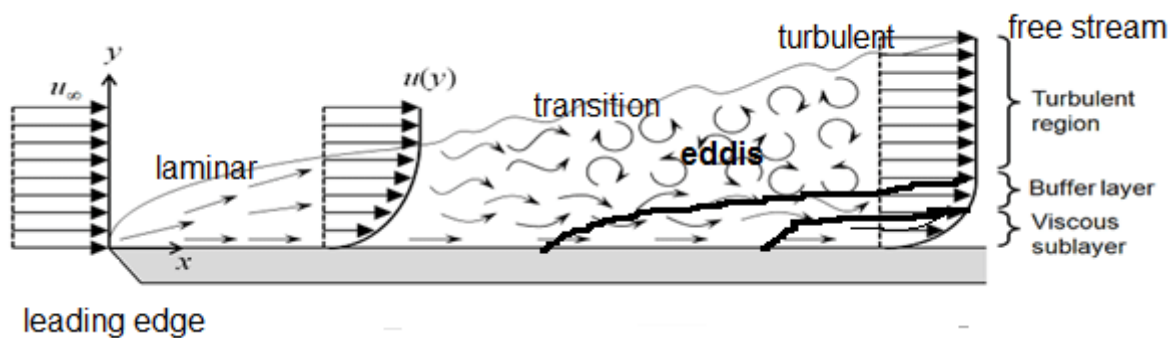
مثال: برای سیستم جریان مثال قبل فرض کنید که صفحه در تمام طولش تا درجه حرارت 60°C گرم می‌شود. حرارت منتقل شده را (الف) برای 20cm اول صفحه و (ب) برای 40cm اول صفحه تعیین کنید.

انتقال حرارت لایه مرزی درهم

جریان Turbulent بر روی یک صفحه :

در حرکت درهم، نوشتن معادلات مشکل بوده و روش‌های تحلیلی کفایت نمی‌کند. در انتقال حرارت در این نوع جریان تئوری‌های زیادی وجود دارد که یکی از قوی‌ترین این تئوری‌ها تئوری Eddy است.

تئوری وجود چرخه‌ها Eddy Theory :



این تئوری می‌گوید وجود Eddy (چرخه) باعث انتقال حرارت به صورت جا به جایی می‌شود و دلیل این که انتقال حرارت بهتر صورت می‌گیرد همین است؛ بنابراین چون چرخه‌ها فرمول‌پذیر نیستند، به دست آوردن معادله‌ی بنیادی برای مسئله مشکل است و از این رو از روابط تجربی استفاده می‌کنند.

انتقال حرارت در لایه مرزی ناآرام Turbulent بر پایه تشابه اصطکاک سیال :

نتایج تجربی به دست آمده برای اصطکاک سیال در جریان آشفته بر روی یک صفحه عبارت است از:

$$\text{ضریب اصطکاک سطحی (فیلمی) موضعی} \left\{ \begin{array}{l} C_{f_x} = 0.0592 Re_x^{-1/5} \quad \text{رنولد Critical} \\ C_{f_x} = 0.370 (\log Re_x)^{-2.584} \quad 5 \times 10^5 < Re_x < 10^7 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 10^7 < Re_x < 10^9 \end{array} \right.$$

رابطه شولتز - گرونوف

$$\text{ضریب اصطکاک متوسط} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_f = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{A}{Re_L} \quad Re_L < 10^7 \\ \bar{C}_f = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.584}} - \frac{A}{Re_L} \quad Re_L < 10^9 \end{array} \right.$$

A: مقدار ثابتی است که از جدول 5-1 کتاب به دست می‌آید.

Table 5-1

Re_{crit}	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1055	1742	3340	8940

Friction coefficients		
Laminar, local	$Re_x < 5 \times 10^5$	$C_{f_x} = 0.332 Re_x^{-1/2}$
Turbulent, local	$5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$	$C_{f_x} = 0.0592 Re_x^{-1/5}$
Turbulent, local	$10^7 < Re_x < 10^9$	$C_{f_x} = 0.37 (\log Re_x)^{-2.584}$
Turbulent, average	$Re_{crit} < Re_x < 10^9$	$\bar{C}_f = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.584}} - \frac{A}{Re_L}$ A from Table 5-1

معادله $St_x \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$ که برای حرکت لامینار بود را می‌توان برای انتقال حرارت در جریان آشفته نیز به کار برد.

$$\left\{ \begin{array}{l} St_x \cdot Pr^{2/3} = 0.0296 Re^{-1/5} \\ St_x \cdot Pr^{2/3} = 0.185 (\log Re_x)^{-2.584} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Re_{crit} < Re_x < 10^7 \\ 10^7 < Re_x < 10^9 \end{array}$$

$$\left(\bar{st} \cdot Pr^{2/3} = \frac{\bar{C}_f}{2} \right)$$

مقدار \bar{C}_f را از معادلات بالا جایگذاری کرده تا معادلات \bar{st} به دست آیند:

$$\bar{st} \cdot Pr^{2/3} = 0.037 Re_L^{-1/5} - 871 Re_L^{-1} \quad ; \quad \left(\overbrace{Re_c}^{5 \times 10^5} < Re < 10^7 \right)$$

از قبل داریم: $\overline{St} = \frac{\overline{Nu}}{Re_L \cdot Pr}$

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = Pr^{1/3} (0.037 Re_L^{0.8} - 871), \quad Re_L < 10^7$$

برای شرایط: $10^7 < Re_L < 10^9$, $Re_{crit} = 5 \times 10^5$

$$Nu_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k} = [0.228 Re_L (\log Re_L)^{-2.584} - 871] Pr^{1/3}$$

برای شرایط: $2 \times 10^5 < Re_L < 5.5 \times 10^6$, $0.7 < Pr < 380$, $0.26 < \frac{\mu_\infty}{\mu_w} < 3.5$

برای مایعات $\longrightarrow \overline{Nu} = 0.036 Pr^{0.43} (Re_L^{0.8} - 9200) \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{\frac{1}{4}}$

در این رابطه، کلیه‌ی خواص به جز μ_∞ و μ_w در دمای فیلم محاسبه می‌شوند که به صورت زیر است:

$$T_f = \frac{T_\infty + T_w}{2}$$

$$\mu_w = \mu(T_w), \quad \mu_\infty = \mu(T_\infty)$$

جدول خواص هوای اتمسفریک

T, K	ρ kg/m ³	c_p kJ/kg · °C	$\mu \times 10^5$ kg/m · s	$\nu \times 10^6$ m ² /s	k W/m · °C	$\alpha \times 10^4$ m ² /s	Pr
100	3.6010	1.0266	0.6924	1.923	0.009246	0.02501	0.770
150	2.3675	1.0099	1.0283	4.343	0.013735	0.05745	0.753
200	1.7684	1.0061	1.3289	7.490	0.01809	0.10165	0.739
250	1.4128	1.0053	1.5990	11.31	0.02227	0.15675	0.722
300	1.1774	1.0057	1.8462	15.69	0.02624	0.22160	0.708
350	0.9980	1.0090	2.075	20.76	0.03003	0.2983	0.697
400	0.8826	1.0140	2.286	25.90	0.03365	0.3760	0.689
450	0.7833	1.0207	2.484	31.71	0.03707	0.4222	0.683
500	0.7048	1.0295	2.671	37.90	0.04038	0.5564	0.680
550	0.6423	1.0392	2.848	44.34	0.04360	0.6532	0.680
600	0.5879	1.0551	3.018	51.34	0.04659	0.7512	0.680

جدول خواص آب اشباع

°F	°C	c_p kJ/kg · °C	ρ kg/m ³	μ kg/m · s	k W/m · °C	Pr
32	0	4.225	999.8	1.79×10^{-3}	0.566	13.25
40	4.44	4.208	999.8	1.55	0.575	11.35
50	10	4.195	999.2	1.31	0.585	9.40
60	15.56	4.186	998.6	1.12	0.595	7.88
70	21.11	4.179	997.4	9.8×10^{-4}	0.604	6.78
80	26.67	4.179	995.8	8.6	0.614	5.85
90	32.22	4.174	994.9	7.65	0.623	5.12
100	37.78	4.174	993.0	6.82	0.630	4.53
110	43.33	4.174	990.6	6.16	0.637	4.04
120	48.89	4.174	988.8	5.62	0.644	3.64
130	54.44	4.179	985.7	5.13	0.649	3.30
140	60	4.179	983.3	4.71	0.654	3.01
150	65.55	4.183	980.3	4.3	0.659	2.73
160	71.11	4.186	977.3	4.01	0.665	2.53
170	76.67	4.191	973.7	3.72	0.668	2.33
180	82.22	4.195	970.2	3.47	0.673	2.16
190	87.78	4.199	966.7	3.27	0.675	2.03
200	93.33	4.204	963.2	3.06	0.678	1.90

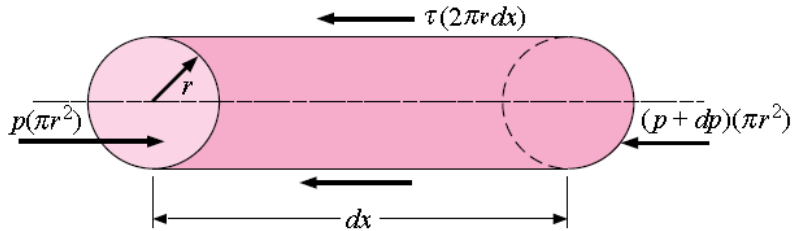
خلاصه‌ی روابط فصل ۵

Flow regime	Restrictions	Equation
Heat transfer		
Laminar, local	$T_w = \text{const}, \text{Re}_x < 5 \times 10^5,$ $0.6 < \text{Pr} < 50$	$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2}$
Laminar, local	$T_w = \text{const}, \text{Re}_x < 5 \times 10^5,$ $\text{Re}_x \text{Pr} > 100$	$\text{Nu}_x = \frac{0.3387 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.0468}{\text{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$
Laminar, local	$q_w = \text{const}, \text{Re}_x < 5 \times 10^5,$ $0.6 < \text{Pr} < 50$	$\text{Nu}_x = 0.453 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$
Laminar, local	$q_w = \text{const}, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$	$\text{Nu}_x = \frac{0.4637 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.0207}{\text{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$
Laminar, average	$\text{Re}_L < 5 \times 10^5, T_w = \text{const}$	$\overline{\text{Nu}}_L = 2 \text{Nu}_{x=L} = 0.664 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$
Laminar, local	$T_w = \text{const}, \text{Re}_x < 5 \times 10^5,$ $\text{Pr} \ll 1$ (liquid metals)	$\text{Nu}_x = 0.564 (\text{Re}_x \text{Pr})^{1/2}$
Laminar, local	$T_w = \text{const},$ starting at $x = x_0, \text{Re}_x < 5 \times 10^5,$ $0.6 < \text{Pr} < 50$	$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}$
Turbulent, local	$T_w = \text{const}, 5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$	$\text{St}_x \text{Pr}^{2/3} = 0.0296 \text{Re}_x^{-0.2}$
Turbulent, local	$T_w = \text{const}, 10^7 < \text{Re}_x < 10^9$	$\text{St}_x \text{Pr}^{2/3} = 0.185 (\log \text{Re}_x)^{-2.584}$
Turbulent, local	$q_w = \text{const}, 5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$	$\text{Nu}_x = 1.04 \text{Nu}_{x,T_w=\text{const}}$
Laminar-turbulent, average	$T_w = \text{const}, \text{Re}_x < 10^7,$ $\text{Re}_{\text{crit}} = 5 \times 10^5$	$\overline{\text{St}} \text{Pr}^{2/3} = 0.037 \text{Re}_L^{-0.2} - 871 \text{Re}_L^{-1}$ $\overline{\text{Nu}}_L = \text{Pr}^{1/3} (0.037 \text{Re}_L^{0.8} - 871)$
Laminar-turbulent, average	$T_w = \text{const}, \text{Re}_x < 10^7,$ liquids, μ at $T_\infty,$ μ_w at T_w	$\overline{\text{Nu}}_L = 0.036 \text{Pr}^{0.43} (\text{Re}_L^{0.8} - 9200) \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4}$

فصل ششم: اصول انتقال حرارت جابجایی (جریان داخلی)

❖ حرکت سیال در داخل لوله ها :

توزیع سرعت و دما در جریان آرام و حرکت تکمیل شده (توسعه یافته) در داخل لوله *Fully Developed* :



خالص نیروهای برشی ناشی از ویسکوزیته = خالص نیروهای فشاری : موازنه نیروها

$$P(\pi r^2) - (P + dP)\pi r^2 = \tau(2\pi r \cdot dx) = 2\pi r dx \left(-\mu \frac{du}{dr}\right)$$

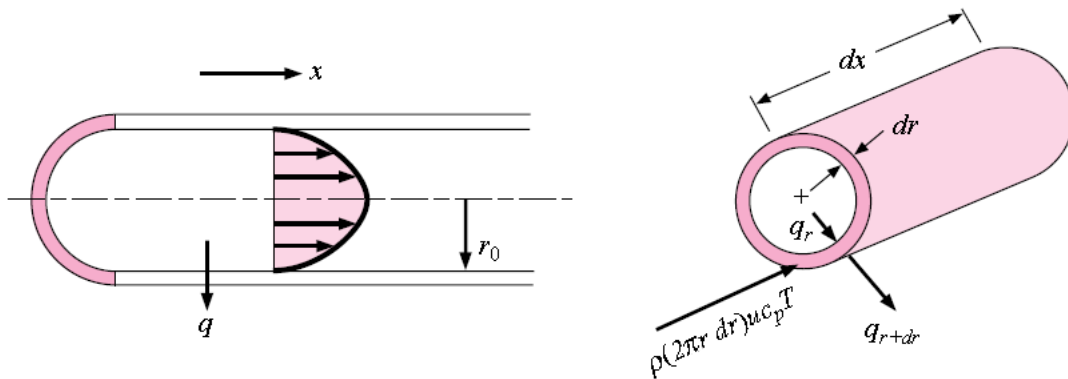
$$-(\pi r^2)dP = 2\pi r dx \left(-\mu \frac{du}{dr}\right)$$

$$du = \frac{1}{2\mu} \cdot r \cdot dr \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} r^2 + c_1$$

$$B. C : \begin{cases} \text{at } r = r_0 \rightarrow \overbrace{u = 0}^{\text{روی دیواره}} \rightarrow u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} (r^2 - r_0^2) \\ \text{at } r = 0 \rightarrow \underbrace{u = u_0}_{\substack{\text{سرعت} \\ \text{ماکزیمم} \\ u = u_{\max}}} \rightarrow u_0 = -\frac{r_0^2}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \end{cases} \rightarrow \frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}$$

موازنه انرژی : حال فرآیند انتقال حرارت برای چنین سیستمی را مورد توجه قرار می دهیم:



$$\text{رابطه ی فوریه} \begin{cases} q_r = -kA_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -k(2\pi r \cdot dx) \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_{r+dr} = q_r + dq_r = -k(2\pi r \cdot dx) \frac{\partial T}{\partial r} + \left[-k(2\pi \cdot dx) \frac{\partial T}{\partial r} \cdot dr - k(2\pi r dx) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot dr \right] \end{cases}$$

تغییرات آنتالپی سیال در امتداد حرکت = انرژی منتقل شده ی هدایتی در امتداد شعاع : موازنه انرژی

$$\text{تغییرات آنتالپی سیال} = (2\pi r \cdot dr)u \cdot \rho \cdot C_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \right)$$

$$\xrightarrow{\text{قراردادن در موازنه}} q_r - (q_r + dq_r) = k \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)}_{\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)} dx \cdot dr = r \cdot \rho \cdot u \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \cdot dr$$

$$\rightarrow \frac{1}{u \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \xrightarrow{\text{به جای سرعت}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot u_0 \cdot r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (I)$$

سرعت

در جریان آرام لوله ها $Re < 2300$ دو حالت داریم. این معادله را در ۲ حالت ساده شده حل می کنیم.

حالت اول : شار حرارتی دریافتی از جداره (میزان انرژی دریافتی در واحد زمان از واحد سطح) ثابت است.

مثلا یک لوله در معرض آفتاب :

$$q_w = \text{cte} \rightarrow \frac{dq_w}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = A \rightarrow \underbrace{T}_{\text{دمای متوسط در طول لوله}} = Ax + B$$

$$\text{از معادله } I \text{ انتگرال} : r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot u_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4r_0^2} \right) + c_1$$

$$\text{انتگرال} : T = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot u_0 \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_0^2} \right) + c_1 \ln r + c_2$$

$$\begin{cases} r = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & \text{به دلیل تقارن} \\ r = r_0 \rightarrow q_w = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \text{cte} & \Rightarrow c_1 = 0 \\ r = 0 \rightarrow T = \underbrace{T_c}_{\text{دمای محور}} & \rightarrow c_2 = T_c \end{cases}$$

توزیع درجه حرارت در جریان آرام در لوله:

$$\Rightarrow T - T_c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{u_0 r_0^2}{4} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \right] \quad (*) \text{ laminar}$$

توزیع دما تابعی از شعاع و طول لوله است: $T(r,x)$

اگر بخواهیم این معادله را بر حسب طول بنویسیم، از $\frac{\partial T}{\partial x}$ انتگرال گرفته و بقیه را ثابت در نظر می‌گیریم.

درجه حرارت حجمی:

عملاً چنین محاسبه‌ای چندان مورد نظر نیست و وضع یک کمیت (دمای متوسط) در یک مقطع برای ما مطرح است. به عبارتی در یک مقطع دمای هم‌سان برای سیال داخل لوله در نظر گرفته و از تغییرات آن بر حسب r صرف نظر می‌کنیم.

بنابراین در جریان سیال در داخل لوله ما T دمای متوسط داریم: $(T_b = T_{bulk})$.

۱ - دمای متوسط در روی صفحه‌ی حاصل از مقطع (متوسط روی شعاع):

$$T_{b \text{ (mean)}} = \frac{\int Q}{\int m C_p} = \frac{\int_0^{r_0} \rho(2\pi r dr) u C_p T}{\int_0^{r_0} \rho(2\pi r dr) u C_p}$$

دمای متوسط در هر مقطع

این دما جهت محاسبه‌ی شار حرارتی موضعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در معادله‌ی بالا به جای T ، معادله‌ی * را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} T_b = T_c + \frac{7}{96} \frac{u_0 r_0^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \\ r = r_0 \quad (*) \quad T_w = T_c + \frac{3}{16} \frac{u_0^2 r_0^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \quad \xrightarrow{q=hA(T_w-T_b)}$$

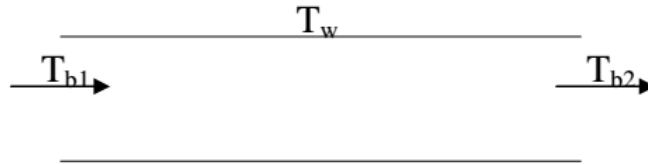
$$\Rightarrow q = hA(T_w - T_b) = kA \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$$

$$\rightarrow h = \frac{k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}}{T_w - T_b} = \frac{48}{11} \cdot \frac{k}{\underbrace{d_0}_{\text{قطر لوله}}} \rightarrow Nu_d = \frac{h \cdot d_0}{k} = 4.364 \quad (\text{laminar}) \text{ با فرض ثابت بودن شار حرارتی}$$

۲ - دمای متوسط در داخل لوله را که هم امتداد شعاع و هم امتداد لوله است در نظر بگیرید، تعریف می‌کنیم:

$$T_{b \text{ (mean)}} = \frac{\int \int T \cdot dx \cdot dr}{\int \int dx \cdot dr}$$

در این جا منظور از T_b عبارت است از خصوصیات یا (دمای متوسط سیال در ابتدا و انتهای مسیر یا لوله‌ی مورد نظر) مثلاً یک قسمت از لوله را بریده و محتویات آن را در داخل ظرفی ریخته و پس از هم زدن آن به صورت آدیاباتیک دمای متوسط را حساب کنید که در این صورت به آن Mixing Cup Temperature گویند.



$$\bar{T}_b = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2} = \frac{T_i + T_o}{2}$$

انتقال حرارت کل : $Q = \dot{m}C_p(T_{b1} - T_{b2}) = h \cdot A(T_w - \bar{T}_b) = h \cdot \underset{\text{جانبی}}{A} (T_w - \bar{T}_b)$

متوسط لگاریتمی
 اگر تغییرات دما خطی نباشد
 $\rightarrow = h \cdot A (T_w - \bar{T}_b) \quad , \quad T_b = \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{T_i}{T_o}\right)}$

حالت دوم : دمای جداره ثابت باشد. مثلاً یک لوله‌ی آب گرم را درون یک استخر می‌توان فرض کرد که دمای روی جداره همواره مقدار ثابتی است. در این حالت از روابط تجربی استفاده می‌کنیم.

روابط تجربی جهت جریان آرام کاملاً توسعه یافته در لوله‌ی با دمای ثابت دیواره :

به عبارتی حالتی که پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته باشد ولی از لحاظ دما در منطقه‌ی ورودی باشیم، یعنی دما شکل نهایی خود را هنوز به دست نیاورده باشد.

جریان آرام، کاملاً توسعه یافته، جداره دما ثابت:

$$Nu_d = 3.66 + \frac{0.0668 \left(\frac{d}{L}\right) Re_d \cdot Pr}{1 + 0.04 \left[\left(\frac{d}{L}\right) Re_d \cdot Pr\right]^{\frac{2}{3}}} \quad \text{هاوسن هاوسن}$$

وقتی طول لوله به اندازه‌ی کافی زیاد باشد :

$$Nu_d = 3.66$$

جریان آرام، دما ثابت، مایعات: Sieder & Tate

$$\begin{cases} Nu_d = 1.86 (Re_d \cdot Pr)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \\ \text{شرط : } Re_d \cdot Pr \frac{d}{L} > 10 \end{cases}$$

کلیدی خواص در دمای بالک محاسبه می‌شود : $T_b = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}$

به جز μ_w که در دمای T_w محاسبه می‌شود.

خلاصه :

Laminar – Fully Developed $\begin{cases} \text{Nu} = 3.66 & \text{اگر دمای جداره ثابت} \\ \text{Nu} = 4.364 & \text{اگر شار حرارتی ثابت} \end{cases}$

$Pe = Re \cdot Pr$ (عدد پکلت (Peclet))

برای لوله : $Pe = Re_d \cdot Pr = \frac{\rho \cdot u \cdot d \cdot C_p}{k}$

$Gz = Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{x}$ (عدد گراتز (Graetz))

اثرات مدخل ورودی برای جریان درهم:

اثرات مدخل ورودی برای جریان درهم درون لوله‌ها بسیار پیچیده‌تر از جریان آرام است و نمی‌توان آن را بر حسب تابع ساده‌ای از گراتز بیان کرد. Kays تأثیر اثر ورودی را برای مقادیر متعددی از Re و Pr محاسبه کرد و نتایج به طور خلاصه در شکل ۶-۵ (آرام) و ۶-۶ (درهم) ارائه شده است. گراتز پروفیل دما را در منطقه‌ی ورودی از لحاظ دما بررسی کرد و فرضیات زیر را انجام داد :

۱ - پروفیل سرعت را سهمی و کاملاً توسعه یافته فرض کرد.

۲ - دمای جداره را ثابت در نظر گرفت.

Figure 6-5 | Local and average Nusselt numbers for circular tube thermal entrance regions in fully developed laminar flow.

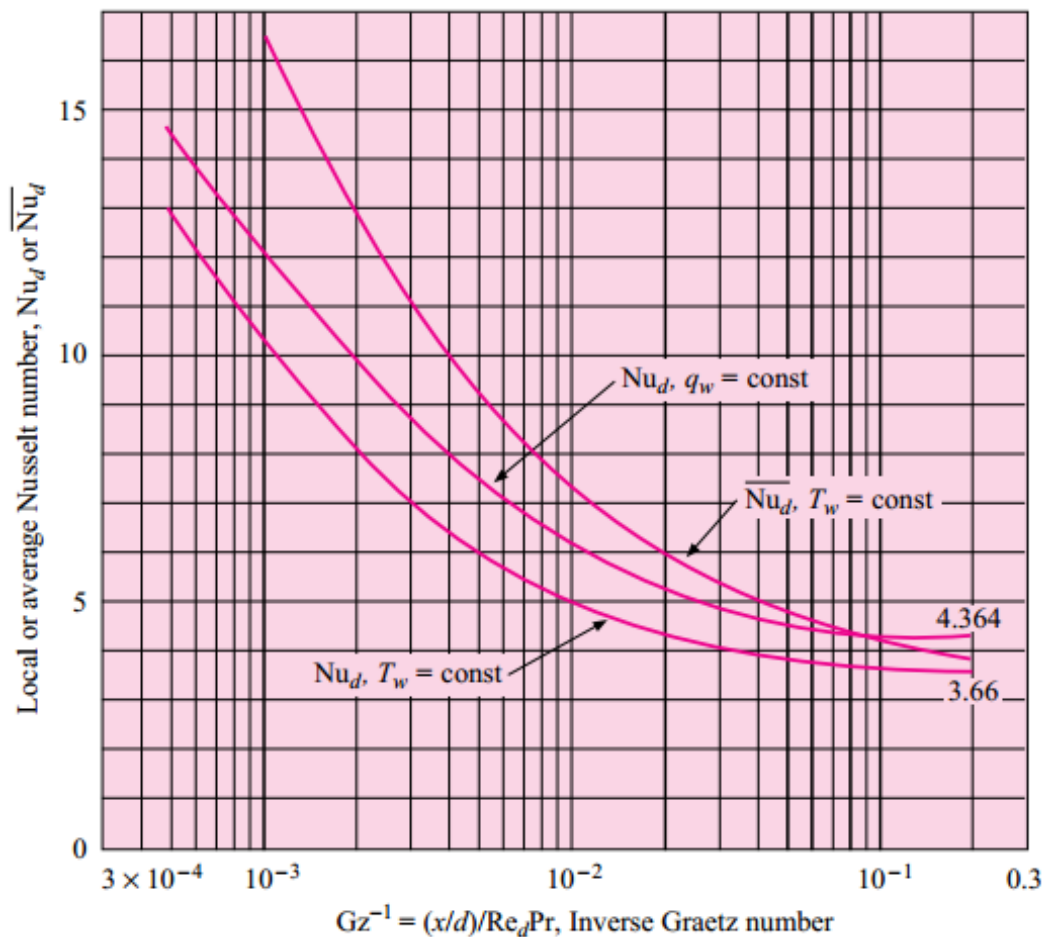
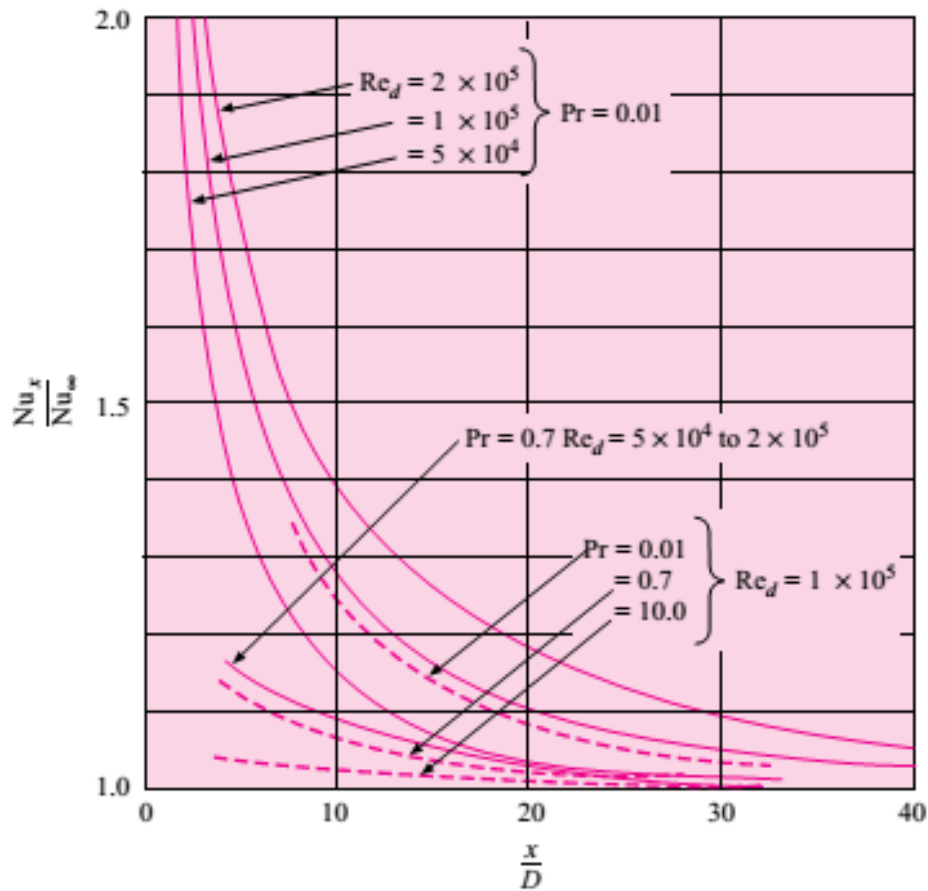


Figure 6-6 | Turbulent thermal entry Nusselt numbers for circular tubes with $q_w = \text{constant}$.



اگر $0.05 \geq GZ^{-1}$ در ناحیه ی ورودی هستیم و از منحنی های فوق استفاده می کنیم.

اگر $0.05 \leq GZ^{-1}$ می توانیم جریان را کاملا توسعه یافته (هم از لحاظ دما و هم از لحاظ سرعت) در نظر گرفته و به عبارتی Nu را مقدار ثابتی (مقدار نهایی اش) قرار دهیم.

اگر مقطع لوله دایره ای نبود، جدولی در کتاب هست که مقدار Nu را برای لوله های با مقاطع مختلف می دهد؛ و به جای قطر، از قطر هیدرولیکی استفاده می کنیم.

$$d = \frac{4 \times \overset{\text{مساحت عبور جریان}}{\bar{A}}}{\underset{\text{محیط خیس شده}}{P}}$$

(قطر هیدرولیکی) (قطر معادل)

در این قسمت با ۲ دسته مسئله روبرو هستیم :

۱ - وقتی که T_{b2} مجهول باشد؛ بنابراین نمی توان Re ، Nu و q را محاسبه نمود. پس مسئله را از طریق حدس و خطا حل می کنیم.

$$T_{b2} = \frac{T_{b1} + T_w}{2} \rightarrow \begin{cases} \mu \\ \nu \\ Re \\ P \\ Pr \end{cases} \rightarrow Nu_x \rightarrow h \rightarrow Q = \dot{m} C_p (T_{b1} - T_{b2}) = h \cdot A (T_w - \bar{T}_b)$$

$$\rightarrow \bar{T}_b = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2} \rightarrow T_{b2} \text{ محاسبه ی } T_{b2} \text{ قدیم} \rightarrow \begin{cases} \text{جواب} \rightarrow \text{اگر اختلاف کم بود} \\ \text{حدس مجدد } T_{b2} \rightarrow \text{اگر اختلاف زیاد بود} \end{cases}$$

.....

۲ - وقتی طول لوله مجهول باشد :

$$\bar{T}_b = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2} \rightarrow \begin{cases} \nu \\ p \\ \mu \\ \mu_w \end{cases} \rightarrow Nu \rightarrow h \rightarrow Q = \dot{m} C_p (T_{b1} - T_{b2}) = h \cdot A (T_w - \bar{T}_b) \rightarrow A \rightarrow L$$

.....

جریان درهم کاملاً توسعه یافته در لوله‌های صاف :

جریان درهم کاملاً توسعه یافته در لوله صاف: (دیتوس - بولتر)

$$Nu_d = \frac{h \cdot d}{k} = 0.023 Re_d^{0.8} Pr^n \begin{cases} n = 0.4 & T_w > T_{\text{سیال}} \text{ جهت گرمایش سیال} \\ n = 0.3 & T_w < T_{\text{سیال}} \text{ جهت سرمایش سیال} \end{cases}$$

$$\text{شرط : } \begin{cases} \Delta T = 0.6 \text{ تا } 100^\circ\text{C} \\ Re > 10000 \\ 0.6 < Pr < 100 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{cases}$$

گنیلینسکی پیشنهاد کرد که برای جریان درهم درون لوله صاف روابط زیر نتایج بهتری دارد:

$$Nu = 0.0214(Re^{0.8} - 100)Pr^{0.4}$$

for $0.5 < Pr < 1.5$ and $10^4 < Re < 5 \times 10^6$ or

$$Nu = 0.012(Re^{0.87} - 280)Pr^{0.4}$$

for $1.5 < Pr < 500$ and $3000 < Re < 10^6$.

برای سیالاتی که برحسب دما تغییر ویسکوزیته می‌دهند، یعنی تغییرات ویسکوزیته سیال با دما زیاد باشد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود که عمدتاً برای مایعات است :

$$Nu_d = 0.027 \frac{Re_d^{0.8} Pr^{\frac{1}{3}}}{\text{در دمای توده } T_b} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

مقادیر Re و Pr در دمای T_b و μ_w در دمای T_w خوانده می‌شوند.

!! کلیه معادلات انتقال حرارت به صورت جا به جایی به فرم کلی $Nu = aRe^b Pr^c$ است.

خلاصه روابط فصل ۶

Subscripts: b = bulk temperature, f = film temperature, ∞ = free stream temperature w = wall temperature		
Geometry	Equation	Restrictions
Tube flow	$Nu_d = 0.023 Re_d^{0.8} Pr^n$	Fully developed turbulent flow, $n = 0.4$ for heating, $n = 0.3$ for cooling, $0.6 < Pr < 100$, $2500 < Re_d < 1.25 \times 10^5$
Tube flow	$Nu_d = 0.0214(Re_d^{0.8} - 100)Pr^{0.4}$ $Nu_d = 0.012(Re_d^{0.87} - 280)Pr^{0.4}$	$0.5 < Pr < 1.5$, $10^4 < Re_d < 5 \times 10^6$ $1.5 < Pr < 500$, $3000 < Re_d < 10^6$
Tube flow	$Nu_d = 0.027 Re_d^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$	Fully developed turbulent flow
Tube flow, entrance region	$Nu_d = 0.036 Re_d^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{0.055}$ See also Figures 6-5 and 6-6	Turbulent flow $10 < \frac{L}{d} < 400$
Tube flow	Petukov relation	Fully developed turbulent flow, $0.5 < Pr < 2000$, $10^4 < Re_d < 5 \times 10^6$, $0 < \frac{\mu_b}{\mu_w} < 40$
Tube flow	$Nu_d = 3.66 + \frac{0.0668(d/L) Re_d Pr}{1 + 0.04[(d/L) Re_d Pr]^{2/3}}$	Laminar, $T_w = \text{const.}$
Tube flow	$Nu_d = 1.86(Re_d Pr)^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$	Fully developed laminar flow, $T_w = \text{const.}$ $Re_d Pr \frac{d}{L} > 10$